

## Stærðfræðikeppni framhaldsskólanema 2015–2016 Neðra stig

Nafn: \_\_\_\_\_

Kennitala: \_\_\_\_\_ Sími: \_\_\_\_\_

Heimilisfang: \_\_\_\_\_ Póstnúmer: \_\_\_\_\_

Netfang: \_\_\_\_\_

Skóli: \_\_\_\_\_ Bekkur eða áfangi: \_\_\_\_\_

Námsár í framhaldsskóla:  1.  2.

I	
II	
III	
21	
22	
Alls	

### Leiðbeiningar:

- Opnið ekki spurningaheftið fyrr en ykkur er sagt að gera það.
- Færið inn allar upplýsingar sem beðið er um hér á undan áður en þið opnið heftið.
- Þetta er ekki venjulegt próf. Ekki er gert ráð fyrir að margir geti svarað öllum spurningunum. Þótt þið getið ekki svarað nema hluta þeirra, þá þarf það ekki að þýða að þið standið ykkur ekki vel. Sumar spurninganna eru mjög erfiðar.
- Keppnin er í fjórum hlutum. Í fyrsta hluta eru tíu spurningar sem gilda þrjú stig hver; í öðrum hluta eru fimm spurningar sem gilda fjögur stig hver; í þriðja hluta eru fimm spurningar sem gilda sex stig hver og í fjórða hluta eru tvær spurningar sem gilda tíu stig hvor. Hámarksfjöldi stiga er 100.
- Allar spurningar í fyrsta og öðrum hluta eru krossaspurningar. Á eftir hverri spurningu eru fjögur eða fimm hugsanleg svör. Aðeins eitt þeirra er rétt. Setjið kross í reitinn framan við rétta svarið. Ef þið getið ekki svarað spurningu, þá borgar sig yfirleitt ekki að giska á svarið, því að fyrir hvert rangt svar er dregið frá eitt stig.
- Í þriðja hluta á aðeins að tilgreina svör, en ekki sýna aðferðina sem notuð var. Svarið skal tilgreint á svarlínunni aftan við spurninguna. Fyrir rétt svar eru gefin sex stig, fyrir rangt svar, ófullkomið eða tvírætt svar er ekkert stig gefið.
- Í lausnum tveggja síðustu dæmanna, í fjórða hluta, á að gera fullkomna grein fyrir hvernig svarið var fengið. Færið inn endanlega lausn, ekki krot sem á heima á rissblöðum. Við mat lausna er tekið tillit til nákvæmni í röksemdafærslu og skýrleika í framsetningu.
- Hjálparmyndir sem fylgja sumum dæmunum eru aðeins ætlaðar til skýringar. Ekki er víst að þær séu teiknaðar í réttum hlutföllum.
- Þið hafið nákvæmlega tvær klukkustundir til að leysa verkefnið eftir að ykkur er leyft að byrja. **Notkun reiknivéla er óheimil.**

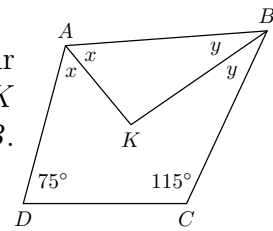
## Fyrsti hluti

Í þessum hluta eru tíu spurningar. Hver spurning er þriggja stiga virði. Setjið kross framan við rétt svar. Fyrir rangt svar er dregið eitt stig frá.

1.  $3 + 3$  er ekki jafnt og

6                        $3^2 - 3 + 1$                         $\frac{3^3}{3} - 3$                         $3 \cdot 2 + \frac{0}{3}$

2. Í ferhyrningi  $ABCD$  er  $\angle D = 75^\circ$  og  $\angle C = 115^\circ$ . Punktur  $K$  er staðsettur innan ferhyrningsins þannig að strikið  $AK$  helmingar hornið  $\angle A$  og strikið  $BK$  helmingar hornið  $\angle B$ . Hversu stórt er hornið  $\angle AKB$ ?



$75^\circ$                         $85^\circ$                         $95^\circ$                         $105^\circ$

3. Talan mitt á milli  $\frac{1}{6}$  og  $\frac{1}{4}$  er

$\frac{1}{24}$                         $\frac{1}{5}$                         $\frac{2}{9}$                         $\frac{5}{24}$

4. Reiknivélin hans Gutta er biluð. Ef Gutti slær inn töluna  $x$  og smellir svo á = þá breytist talan í

$$|x| \text{ ef } x < -2 \qquad -5 \text{ ef } -2 \leq x \leq 3 \qquad \frac{1}{x} \text{ ef } x > 3.$$

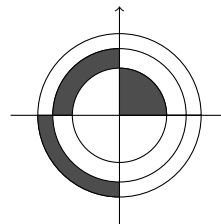
Gutti slær inn töluna  $-3$  og svo fjórum sinnum í röð á =. Hvaða tölu sýnir reiknivélin þá?

$-5$                         $\frac{1}{5}$                         $\frac{1}{3}$                        3

5. Í jafnhliða þríhyrningi er fjöldi fermetra í flatarmáli þríhyrningsins jafn fjölda metra í ummáli hans. Hver er hliðarlengd þríhyrningsins í metrum?

$\sqrt{3}$                         $2\sqrt{3}$                         $4\sqrt{3}$                         $6\sqrt{3}$

6. Á myndinni eru þrír hringar með miðju í  $(0,0)$ . Ef skyggðu svæðin hafa öll sama flatarmálið og geisli (radíus) innsta hringins er 1, hvert er þá margfeldi geisla hringanna þriggja?

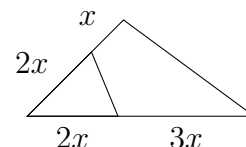


- $\sqrt{6}$        3        $\frac{3\sqrt{3}}{2}$        6

7. Teningur er málaður rauður. Teningnum er skipt í 125 smærri jafnstóra teninga. Hversu margir smærri teninganna hafa aðeins eina málaða hlið?

- 9       25       54       96

8. Flatarmál minni þríhyrningsins er  $12 \text{ m}^2$ . Hversu margir fermetrar er stærri þríhyrningurinn?



- 30       35       40       45

9. Á lítilli eyju eru 99% eyjarskeggja frumbyggjar. Hluti frumbyggja flyst í burtu og þá eru frumbyggjar 98% eyjarskeggja. Ef eyjarskeggjar voru alls 1000, hversu margir frumbyggjar fluttu burt?

- 10       100       350       500

10. Ef  $x - y = 2$  og  $x^2 - y^2 = 8$  þá er  $2x - 6y$  jafnt

- 14       0       8       14

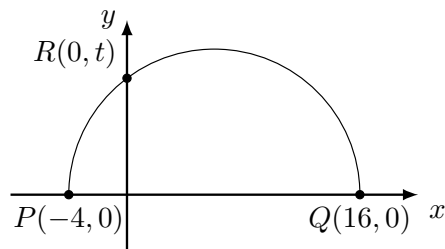
## Annar hluti

Í þessum hluta eru fimm spurningar. Hver spurning er fjögurra stiga virði. Setjið kross framan við rétt svar. Fyrir rangt svar er dregið eitt stig frá.

11. Leggjum saman 31 heiltölu frá 2001 til 2031 og deilum með 31 í útkomuna. Hvað fæst þá út?

2012       2013       2015       2016       2496

12. Á myndinni er strikið með endapunkta  $P(-4, 0)$  og  $Q(16, 0)$  miðstrengur hálfhrings. Ef punkturinn  $R(0, t)$  er á hálfhringnum þá er gildið á  $t$  jafnt

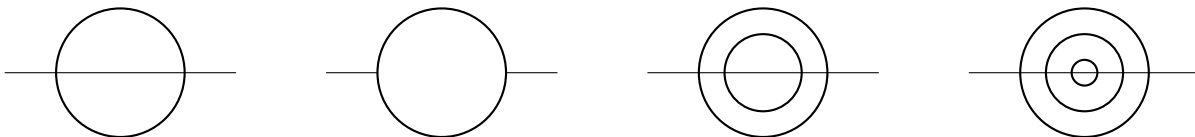


6       7       8       9       10

13. Ef  $a$  og  $b$  eru tvær ólíkar tölur þar sem  $\frac{a+b}{a-b} = 3$ , þá er  $\frac{a}{b}$  jafnt og

-1       1       2       3       5

14. Hversu margar eftirfarandi mynda er mögulegt að teikna án þess að lyfta penna af blaði og án þess að teikna ofan í neina línu sem komin er?



0       1       2       3       4

15. Siggí á þrjá hunda; Glúm, Plútó og Láka. Plútó étur ef Glúmur er úti. Plútó étur ekki ef Láki er ekki úti. Glúmur og Láki eru aldrei samtímis úti. Aron ályktar að Glúmur sé aldrei úti. Sigfús ályktar að Láki sé aldrei úti og Páll ályktar að Plútó sé alltaf étandi. Hver félaganna þriggja ályktar rétt?

Aðeins Aron  
 Aðeins Páll og Sigfús  
 Aðeins Páll  
 Aðeins Aron og Sigfús  
 Aron, Sigfús og Páll

## Priðji hluti

Í þessum hluta eru fimm dæmi og er hvert dæmi sex stiga virði. Tilgreinið svar ykkar á svarlínunni. Ekki þarf að skýra hvernig svarið er fengið. Fyrir rangt svar, ófullkomið svar eða tvírætt svar fæst ekkert stig.

16.  $a$  og  $b$  eru jákvæðar heilar tölur. Hvert er minnsta mögulega gildið á summunni  $a + b$  ef

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{2a} + \frac{1}{3a} = \frac{1}{b^2 - b}$$

Svar: \_\_\_\_\_

17. Krákustígur milli tveggja punkta  $A(a_1, a_2)$  og  $B(b_1, b_2)$  í hnitakerfinu er hver sú leið milli  $A$  og  $B$  sem samanstendur alfarið af láréttum og lóðréttum línustrikum. Hver er stysti krákustígurinn frá  $(0, 0)$  til  $(5, 7)$  og þaðan til  $(10, 0)$ ?

Svar: \_\_\_\_\_

18. Ferhyrningur  $ABCD$  með innritaðan hring hefur hliðarlengdir  $AB = 3$ ,  $CD = 8$  og  $AD = 7$ . Hver er lengd hliðar  $BC$ ?

Svar: \_\_\_\_\_

19. Láki velur 150 tölur úr menginu  $\{\sqrt{2} - 1, \sqrt{2} + 1\}$  svo sérhver talnanna er því annaðhvort  $\sqrt{2} - 1$  eða  $\sqrt{2} + 1$ . Láki útbýr summuna  $S$  þannig að

$$S = x_1x_2 + x_3x_4 + x_5x_6 + \dots + x_{149}x_{150}$$

þar sem  $x_1, x_2, x_3, \dots, x_{149}, x_{150}$  tákna tölurnar 150 sem Láki velur. Láki gætir þess að velja tölurnar þannig að  $S$  sé heiltala. Hver er stærsta mögulega heiltalan sem Láki getur fengið fyrir  $S$ ?

Svar: \_\_\_\_\_

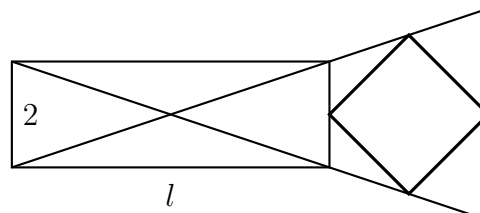
20. Hversu margar jákvæðar heiltölur minni en 1000 hafa þversummuna 9? (Þversumma tölu er summa tölustafa tölunnar; talan 234 hefur þversummu  $2 + 3 + 4 = 9$ .)

Svar: \_\_\_\_\_

## Fjórði hluti

Í þessum hluta er hvort dæmi tíu stiga virði. Hér ber að rökstyðja svörin. Við mat lausna er tekið tillit til frágangs, nákvæmni og skýrleika í framsetningu. Athugið að hægt er að fá stig fyrir að leysa dæmið að hluta eða koma fram með hugmynd sem er mikilvægt skref að lausn.

21. Myndin sýnir ferning þar sem eitt horn hans snertir rétthyrning af stærðinni  $2 \times l$ . Önnur tvö horn ferningsins snerta framlengdar hornalínur rétthyrningsins og fjórða horn ferningsins er á framlengdri línu sem liggur um miðju rétthyrningsins og andstætt horn ferningsins.



Finnið lengdina  $l$  þegar flatarmál rétthyrningsins og ferningsins eru jöfn.

- 22.** Sannið að ekki séu til neinar jákvæðar heilar tölur  $a$  og  $b$  sem eru þannig að  $4a^2 + 4a = b^2 + b$ .