

## Stærðfræðikeppni framhaldsskólanema 2025–2026

### Úrslitakeppni

**Athugið:** Notið aðskilin blöð fyrir hvert dæmi. Notið eina hlið hvers blaðs. Merkið öll blöð með nafni. Þetta skiptir máli við yfirferð. Engar reiknivélar eru leyfðar. Rökstyðjið öll svör skriflega.

#### Dæmi 1

Við köllum tölu samhverfa ef hún er eins þegar hún er lesin afturábak í tugakerfi. Til dæmis er 13531 samhverf en 12322 er það ekki. Gefið er að  $x$  sé fjögurra stafa samhverf tala og að  $x + 852$  er fimm stafa samhverf tala. Hvað er  $x$ ?

#### Dæmi 2

Þú byrjar með (endanlegan) lista  $L$  af tölum. Við skiptum þessum lista  $L$  út fyrir nýjan lista sem gefur til kynna hversu oft hver tala kom fyrir í  $L$ . Til dæmis ef tala kemur þrisvar fyrir í  $L$  mun nýji listinn innihalda þrist sem samsvarar þeim tölum. Til dæmis ef  $L = [7, 1, 1, 1, 4, 5, 4]$  er nýji listinn  $[1, 1, 2, 3]$ . Svo skiptum við út nýja listanum fyrir enn annan lista með sama hætti, og svo framvegis. Sannið að á endanum verði listinn einfaldlega eitt eintak af tölunni 1.

#### Dæmi 3

Gísli hefur unun af heita pottinum í sveitinni sinni. Þar eru þrjár kranar í litunum rauður, grænn og blár. Rennsli og hitastig hvers krana er fast.

- Ef skrúfað er frá rauða og græna krananum tekur 70 mín að fylla pottinn af 41 °C vatni.
- Ef skrúfað er frá rauða og bláa krananum tekur 42 mín að fylla pottinn af 35 °C vatni.
- Ef skrúfað er frá græna og bláa krananum tekur 35 mín að fylla pottinn af 39 °C vatni.

Hvað væri hitastig pottsins í gráðum ef hann skrófar frá öllum krönunum samtímis? (**Ath:** Ef einum lítra af 20 °C vatni er blandað við tvo lítra af 29 °C vatni þá fást þrjú lítrar af 26 °C vatni.)

#### Dæmi 4

Rétthyrndur þríhyrningur með jákvæðar heiltöluhliðarlengdir hefur ummál 1000. Hverjar eru mögulegu hliðarlengdir hans?

#### Dæmi 5

Magnea, Mía og Friðfinnur sitja í hring. Það er búið að túska jákvæða heiltölu á enni allra þeirra, svo þau sjá öll tölur hinna tveggja en ekki eigin tölu. Þeim er sagt að summa tveggja talnanna er jöfn þeirri þriðju. Magnea er spurð hver tala sín er, en svarar að hún viti ekki. Mía er spurð hver tala sín er, en svarar að hún viti ekki. Friðfinnur er spurður hver tala hans er, en svarar að hann viti ekki. Loks er Magnea spurð aftur og segir að tala sín er 65. Hverjar eru tölurnar á ennum þeirra?

#### Dæmi 6

Lát  $p$  vera frumtölu og  $S$  vera mengi heiltana frá 0 til  $p - 1$ . Við skiptum menginu  $S$  endurtekið út fyrir mengið

$$\{x \cdot x \pmod{p} \mid x \in S\}$$

þar til  $S$  hættir að breytast. Í lok þessa ferlis, hver er stærð  $S$ ?

### Dæmi 7

Látum  $\Gamma$  vera hring, og  $P$  vera einhvern punkt utan hringsins. Látum snertlana tvo við hringinn  $\Gamma$  gegnum punktinn  $P$  snerta  $\Gamma$  í punktum  $A$  og  $B$ . Sýnið að miðja innritaðs hrings í  $ABP$  liggi á hringnum  $\Gamma$ .

### Dæmi 8

Ósvífinn hakkari er að fela sig í einum af  $2^N$  vefþjónum, sem hver er tilgreindur með  $N$  bitum. Til dæmis ef  $N = 5$  er einn vefþjóninn gefinn með nafninu 01101.

Til að góma hann tengjast  $K$  lögreglumenn við  $K$  vefþjóna. Svo skiptast hakkarinn og lögreglumenn á að hreyfast. Þeir geta annað hvort staðið í stað eða fært sig á vefþjón sem hefur einn bita öðruvísi. Til dæmis má fara úr 01101 í 11101. Hvað  $K$  að vera að lágmarki til að einhver lögreglumaður nái að vera á sama vefþjón og hakkarinn eftir endanlega langan tíma sama hvar hakkarinn og lögreglumennirnir byrja? Gerum ráð fyrir að allir beiti bestu mögulegu strategíu. Allir vita ávallt hvar allir aðrir eru.