

Stærðfræðikeppni framhaldsskólanema 2012-2013 Efra stig

Nafn: _____

Kennitala: _____ Sími: _____

Heimilisfang: _____ Póstnúmer: _____

Netfang: _____

Skóli: _____ Bekkur eða áfangi: _____

Námsár í framhaldsskóla: 1. 2. 3. 4.

I	
II	
16	
17	
18	
19	
Alls	

Leiðbeiningar:

- Opnið ekki spurningaheftið fyrr en ykkur er sagt að gera það.
- Færið inn allar upplýsingar sem beðið er um hér á undan áður en þið opnið heftið.
- Þetta er ekki venjulegt próf. Ekki er gert ráð fyrir að margir geti svarað öllum spurningunum. Þótt þið getið ekki svarað nema hluta þeirra, þá þarf það ekki að þýða að þið standið ykkur ekki vel. Sumar spurninganna eru mjög erfiðar.
- Keppnin er í þremur hlutum. Í fyrsta hluta eru tíu spurningar sem gilda þrjú stig hver; í öðrum hluta eru fimm spurningar sem gilda sex stig hver og í þriðja hluta eru fjórar spurningar sem gilda tíu stig hver. Hámarksfjöldi stiga er 100.
- Allar spurningar í fyrsta hlutanum eru krossaspurningar. Á eftir hverri spurningu eru fjögur hugsanleg svör. Aðeins eitt þeirra er rétt. Setjið kross í reitinn framan við rétta svarið. Ef þið getið ekki svarað spurningu, þá borgar sig yfirleitt ekki að giska á svarið, því að fyrir hvert rangt svar er dregið frá eitt stig.
- Í öðrum hluta á aðeins að tilgreina svör, en ekki sýna aðferðina sem notuð var. Svarið skal tilgreint á svarlínunni aftan við spurninguna. Fyrir rétt svar eru gefin sex stig, fyrir rangt svar, ófullkomið eða tvírætt svar er ekkert stig gefið.
- Í lausnum fjögurra síðustu dæmanna, í þriðja hluta, á að gera fullkomna grein fyrir hvernig svarið var fengið. Færið inn endanlega lausn, ekki krot sem á heima á riss-blöðum. Við mat lausna er tekið tillit til nákvæmni í röksemdafærslu og skýrleika í framsetningu.
- Hjálparmyndir sem fylgja sumum dæmunum eru aðeins ætlaðar til skýringar. Ekki er víst að þær séu teiknaðar í réttum hlutföllum.
- Þið hafið nákvæmlega tvær og hálf klukkustund til að leysa verkefnið eftir að ykkur er leyft að byrja. **Notkun reiknivéla er óheimil.**

Fyrsti hluti

Í þessum hluta eru tíu spurningar. Hver spurning er þriggja stiga virði. Setjið kross framan við rétt svar. Fyrir rangt svar er dregið eitt stig frá.

1. Þegar brotið $\frac{2^{n+3} - 2 \cdot 2^n}{2 \cdot 2^{n+2}}$ er fullstýtt fæst

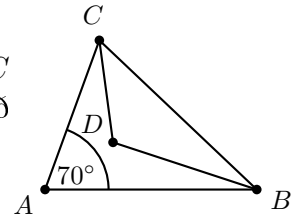
$\frac{5}{8}$

$\frac{3}{4}$

$\frac{7}{8}$

1

2. Í þríhyrningi ABC skerast helmingalínur hornanna $\angle ABC$ og $\angle BCA$ í punkti D . Hve stórt er hornið $\angle CDB$ ef hornið $\angle CAB = 70^\circ$?



55°

105°

125°

145°

3. Meðaltal fimmtíu talna er 76. Fjörtíu af þessum tölum hafa meðaltalið 80. Hvert er meðaltal hinna tíu?

28

38

40

60

4. Punktar P og Q liggja báðir á sama helmingi línustriksins AB . Punkturinn P skiptir AB í hlutföllunum $2 : 3$ og Q skiptir AB í hlutföllunum $3 : 4$. Hve langt er strikið AB ef lengd PQ er 4?

140

130

120

110

5. Á hve marga vegu er hægt að fylla upp í 3×3 töflu með tölunum 1, 2 og 3 þannig að hver þessara talna birtist aðeins einu sinni í hverri línu og hverjum dálki? (Eitt slíkt dæmi er sýnt hér til hliðar.)

2	1	3
1	3	2
3	2	1

6

8

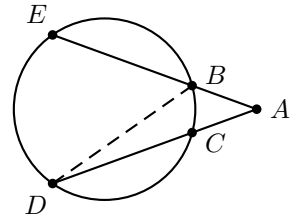
12

24

6. Ef m er ferningstala (annað veldi heillar tölu) er næsta ferningstala stærri en m jöfn

$m + 2\sqrt{m} + 1$ $m^2 + 2m + 1$ $m + 1$ $\sqrt{m} + 1$

7. Á mynd er hornið $A = 40^\circ$ og bogarnir BE , DE og CD allir jafnir. Hve stórt er hornið $\angle DBE$?



50° 55° 60° 65°

8. Hver er síðasti tölustafur tölunnar $1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot 2013$ (margfeldi allra oddatalna frá 1 til 2013)?

1 3 5 7

9. Fall f er þannig að $f(x \cdot y) = f(x) + f(y)$ fyrir allar jákvæðar heiltölur x og y . Hvert er gildið á $f(25)$ ef gefið er að $f(10) = 6$ og $f(20) = 10$?

4 8 12 18

10. Réttthyrningur hefur flatarmál a og lengd hornalínu er d . Hvert er ummál réttthyrningsins?

$2\sqrt{d^2 + a}$ $2a\sqrt{d}$ $2\sqrt{2d^2 + a}$ $2\sqrt{d^2 + 2a}$

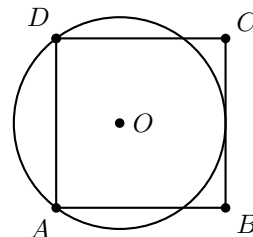
Annar hluti

Í þessum hluta eru fimm dæmi og er hvert dæmi sex stiga virði. Tilgreinið svar ykkar á svarlínunni. Ekki þarf að skýra hvernig svarið er fengið. Fyrir rangt svar, ófullkomið svar eða tvírætt svar fæst ekkert stig.

11. Gefið er fallið $f(x) = ax^5 + bx^3 + cx + 2$ og að $f(3) = 5$. Finnið $f(-3)$.

Svar: _____

12. Myndin sýnir ferning og hring með miðju O . Hringurinn fer í gengum hornpunktana A og D og hefur hliðina BC sem snertil. Hver er geisli (radíus) hringsins ef hliðarlengd ferningsins er 8?



Svar: _____

13. Fljótabátur siglir með jöfnum hraða. Þegar báturinn siglir með straumnum er hann 5 klst frá A til B , en 7 klst til baka. Hve langan tíma tekur það vélarvana pramma að fljóta með straumnum frá A til B ?

Svar: _____

14. Anna, Birna, Diljá, Erna og Fjóla hugsa sér fimm ólíkar frumtölur.

Anna segir: „Mín tala er hvorki stærst né minnst.“

Birna segir: „Mín tala er hvorki stærst né minnst.“

Diljá segir: „Mín tala er stærst.“

Erna segir: „Mín tala er minnst.“

Fjóla segir: „Mín tala er ekki minnst.“

Nákvæmlega ein þeirra skrökvar. Hver hugsaði sér stærstu frumtöluna?

Svar: _____

15. Ég þarf að gera upp við mig hvort ég á að fara til Lundúna eða Parísar. Því kasta ég teningi og skrái hjá mér hvort upp kemur oddatala (o) eða slétt tala (s). Ég kasta teningnum svo oft sem þarf:

Ef fyrr kemur upp röðin $s - s - o$ vel ég Lundúnir.

Hinsvegar, ef fyrr kemur upp röðin $o - s - s$, þá vel ég París.

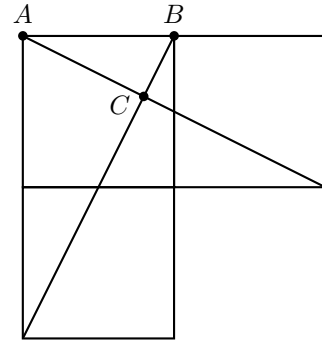
Hve líklegt er að París verði fyrir valinu?

Svar: _____

Þriðji hluti

Í þessum hluta er hvert dæmi tíu stiga virði. Hér ber að rökstyðja svörin. Við mat lausna er tekið tillit til frágangs, nákvæmni og skýrleika í framsetningu. Athugið að hægt er að fá stig fyrir að leysa dæmið að hluta eða koma fram með hugmynd sem er mikilvægt skref að lausn.

- 16.** Myndin sýnir þrjú jafnstóra ferninga með hliðarlengd 1. Hornpunktar ferninganna eru tengdir línustrikum eins og sýnt er. Línustrikin skerast í punkti C . Hvert er flatarmál þríhyrningsins ABC ?



17. Finnið allar jákvæðar heiltölur n þannig að talan $n^2 + 1$ gangi upp í töluna $n^4 + 2n^3 + 2n^2 + 2n + 11$.

18. Finnið margliðu $P(x)$, af sem lægstu stigi, sem uppfyllir eftirfarandi skilyrði:

- (a) Allir stuðlar P eru heiltölur;
- (b) allar rætur P eru heiltölur;
- (c) $P(0) = -1$ og
- (d) $P(3) = 128$.

- 19.** Sýnið að fyrir sérhverja heiltölu $k \geq 2$ megi finna k jákvæðar heiltölur (ekki endilega ólíkar) þannig að summa talnanna sé jöfn margfeldi þeirra.