

Stærðfræðikeppni framhaldsskólanema 2008-2009 Efra stig

Nafn: _____

Kennitala: _____ Sími: _____

Heimilisfang: _____ Póstnúmer: _____

Skóli: _____

Bekkur eða áfangi: _____

Námsár í framhaldsskóla: 1. 2. 3. 4.

I	
II	
16	
17	
18	
19	
Alls	

Leiðbeiningar:

- Opnið ekki spurningaheftið fyrr en ykkur er sagt að gera það.
- Færið inn allar upplýsingar sem beðið er um hér á undan áður en þið opnið heftið.
- Þetta er ekki venjulegt próf. Ekki er gert ráð fyrir að margir geti svarað öllum spurningunum. Þótt þið getið ekki svarað nema hluta þeirra, þá þarf það ekki að þýða að þið standið ykkur ekki vel. Sumar spurninganna eru mjög erfiðar.
- Keppnin er í þremur hlutum. Í fyrsta hluta eru tíu spurningar sem gilda þrjú stig hver; í öðrum hluta eru fimm spurningar sem gilda sex stig hver og í þriðja hluta eru fjórar spurningar sem gilda tíu stig hver. Hámarksfjöldi stiga er 100.
- Allar spurningar í fyrsta hlutanum eru krossaspurningar. Á eftir hverri spurningu eru fjögur hugsanleg svör. Aðeins eitt þeirra er rétt. Setjið kross í reitinn framan við rétta svarið. Ef þið getið ekki svarað spurningu, þá borgar sig yfirleitt ekki að giska á svarið, því að fyrir hvert rangt svar er dregið frá eitt stig.
- Í öðrum hluta á aðeins að tilgreina svör, en ekki sýna aðferðina sem notuð var. Svarið skal tilgreint á svarlínunni aftan við spurninguna. Fyrir rétt svar eru gefin sex stig, fyrir rangt svar, ófullkomið eða tvírætt svar er ekkert stig gefið.
- Í lausnum fjögurra síðustu dæmanna, í þriðja hluta, á að gera fullkomna grein fyrir hvernig svarið var fengið. Færið inn endanlega lausn, ekki krot sem á heima á rissblöðum. Við mat lausna er tekið tillit til nákvæmni í röksemdafærslu og skýrleika í framsetningu.
- Hjálparmyndir sem fylgja sumum dæmunum eru aðeins ætlaðar til skýringar. Ekki er víst að þær séu teiknaðar í réttum hlutföllum.
- Þið hafið nákvæmlega tvær og hálf klukkustund til að leysa verkefnið eftir að ykkur er leyft að byrja. **Notkun reiknivéla er óheimil.**

Glitnir styrkir Stærðfræðikeppni framhaldsskólanema

Fyrsti hluti

Í þessum hluta eru tíu spurningar og er hver spurning þriggja stiga virði. Setjið kross framan við rétt svar. Fyrir rangt svar er dregið eitt stig frá.

1. Tuttugu og sex menn, númeraðir í röð frá 1 til 26, sitja við hringlaga borð með jöfnu millibili. Hvert er númer mannsins sem situr beint á móti manni númer 9?

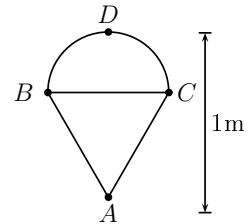
 19

 20

 21

 22

2. Þríhyrningurinn ABC er jafnhliða og hálfhringur er reistur á hlið BC eins og sýnt er á mynd. Punkturinn D er miðpunktur hálfhringsins. Ef lengd AD er 1m, hver er hliðarlengd þríhyrningsins í metrum?


 $\frac{2}{3}$
 $\frac{3}{4}$
 $\frac{3 - \sqrt{3}}{2}$
 $\sqrt{3} - 1$

3. Í kapphlaupi yrði A 20 metrum á undan B í mark. B yrði 10 metrum á undan C í mark. A yrði 28 metrum á undan C í mark. Hversu langt er hlaupið ef hver keppandi hleypur með jöfnum hraða?

 58 m

 100 m

 116 m

 200 m

4. Á Hlemmi hittist hópur stráka og stelpna. Í fyrsta strætisvagn fara 15 stelpur úr hópnum og eru þá tvöfalt fleiri strákar en stelpur eftir. Í næsta vagn fara 45 strákar úr hópnum og eru þá fimmfalt fleiri stelpur en strákar eftir. Hversu margar stelpur voru í hópnum sem hittist á Hlemmi?

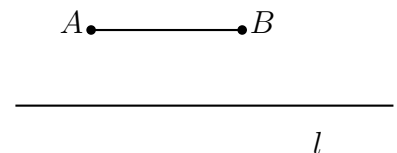
 29

 40

 43

 50

5. Látum l vera beina línu og AB vera strik sem er samsíða l . Strikið AB hefur lengdina 10 og fjarlægð punktanna A og B til línunnar l er 5. Hver er fjöldi ólíkra punkta P á línunni l þannig að punktarnir A , B og P myndi jafnarma þríhyrning?


 2

 3

 4

 5

6. Ef

$$A + B = C, \quad C + D = E, \quad E + A = F, \quad B + D + F = 100, \quad A = 8,$$

hvert er gildið á F ?

 26

 38

 58

 62

7. Ef $x + \frac{1}{x} = 3$ þá er $x^3 + \frac{1}{x^3}$ jafnt

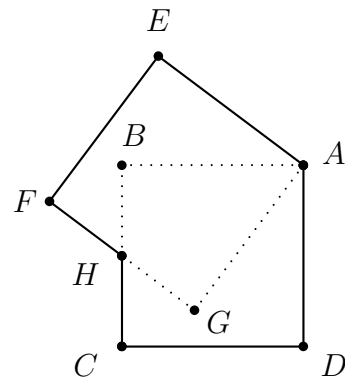
 15

 16

 17

 18

8. Tveir ferningar, $ABCD$ og $AEFG$ eru með hliðarlengdir 1. Punkturinn H er miðpunktur beggja hliðanna BC og FG . Hvert er flatarmál $AEFHCD$?


 $\sqrt{2}$
 $\frac{3}{2}$
 $\frac{4}{3}$
 $\sqrt{3}$

9. Munið að a^{b^c} er reiknað sem $a^{(b^c)}$. Ef

$$2^{2^x} + 4^{2^x} = 42,$$

hvert er gildið á $\sqrt{2^{2^{2^x}}}$?

 4

 8

 16

 32

10. Gerum ráð fyrir að a_1, a_2, \dots, a_n og n séu jákvæðar heiltölur (ekki endilega ólíkar) þannig að

$$(x + a_1)(x + a_2) \cdots (x + a_n) = x^n + 261x^{n-1} + \cdots + 2008.$$

Hver eftirfarandi talna er möguleg sem n ?

 7

 12

 63

 669

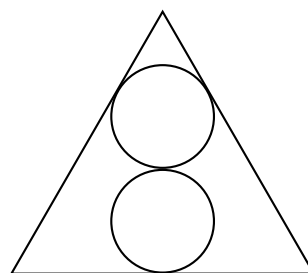
Annar hluti

Í þessum hluta eru fimm dæmi og er hvert dæmi sex stiga virði. Tilgreinið svar ykkar á svarlínunni. Ekki þarf að skýra hvernig svarið er fengið. Fyrir rangt, ófullkomið eða tvírætt svar fæst ekkert stig.

11. Andri og Goggi sitja í stólalyftu með stólum númeruðum í röð. Á sama augnabliki og Andri, í stól 96, mætir stól 105 þá mætir Goggi, í stól 241, stól 230. Hve margir stólar eru í stólalyftunni?

Svar: _____

12. Jafnhliða þríhyrningur hefur hliðarlengdir 1. Tveir hringar með sama geisla eru innritaðir í þríhyrninginn þannig að miðjur hringanna liggja á hæð í þríhyrningnum eins og sýnt er á myndinni. Hver er stærsti mögulegi geisli slíkra hringa?



Svar: _____

13. Tveir flutningaprammar sigla fram og til baka með jöfnum hraða. Prammarnir leggja af stað, hvor frá sínum árbakka, á sama augnabliki og mætast 700 metra frá öðrum árbakkanum; halda ferð sinni áfram án þess að stoppa og mætast næst 400 metra frá hinum árbakkanum. Hversu breið er áin?

Svar: _____

14. Í hópi nokkrum eru lækmar og kennarar. Meðalaldur allra í hópnunum er 40 ár. Meðalaldur læknanna í hópnunum er 35 ár, en meðalaldur kennaranna í hópnunum er 50 ár. Hvert er hlutfallið milli fjölda lækna og fjölda kennara í hópnunum?

Svar: _____

15. Ef a , $a + b$ og $a + 9b$ eru hliðarlengdir í rétthyrndum þríhyrningi og $a, b > 0$ hvað er þá $\frac{a}{b}$?

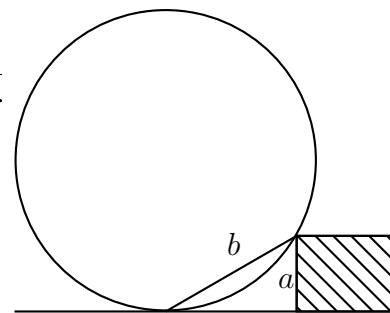
Svar: _____

Þriðji hluti

Í þessum hluta eru fjögur dæmi. Hvert dæmi er tíu stiga virði. Hér ber að rökstyðja svörin. Við mat lausna er tekið tillit til frágangs og skýrleika í framsetningu. Athugið að hægt er að fá stig fyrir að leysa dæmið að hluta eða koma fram með hugmynd sem er mikilvægt skref að lausn.

16. Ræðu töluna $\frac{2}{7}$ má skrifa sem summu tveggja einingarbrotu $\frac{1}{a} + \frac{1}{b}$ þar sem $0 < a < b$ eru heilar tölur. Hver er summan $a + b$?

17. Hjól liggur að kantsteini. Hæð kantsteinsins er a . Fjarlægðin frá punktinum sem hjólið hvílir á að efri brún kantsteinsins er b (sjá mynd). Hver er geisli hjólsins?



18. Fyrir hversu mörg pör frumtalna (p, q) má finna heiltölu n þannig að

$$(p^2 + 1)(q^2 + 1) = n^2 + 1?$$

19. Í ferning með hliðarlengdir 1 eru inritaðir tveir hringbogar með geisla 1 eins og sýnt er á mynd. Annar hringboginn hefur miðju í A og hinn hringboginn hefur miðju í B . Hver er mismunur flatarmála skyggðu svæðanna?

