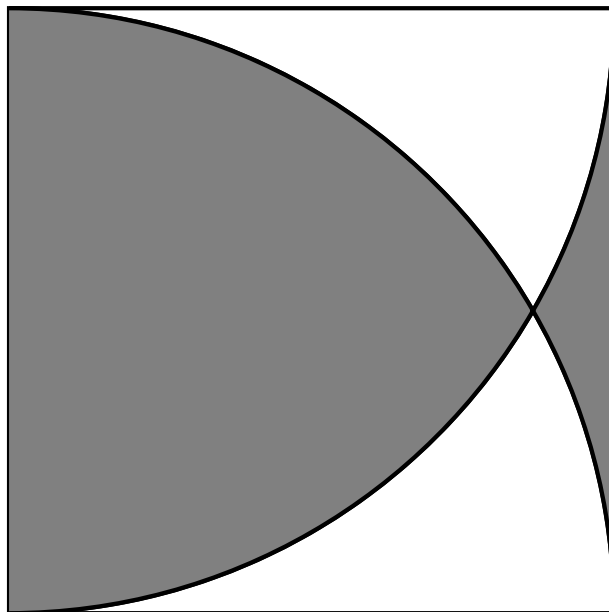


Íslenska stærðfræðafélagið  
Félag raungreinakennara í framhaldsskólum

## Stærðfræðikeppni framhaldsskólanema 2008-2009

Svör og lausnir

Efra stig



Glitnir styrkir Stærðfræðikeppni framhaldsskólanema

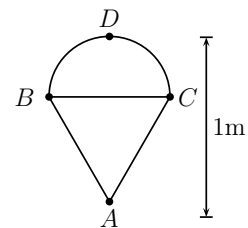
## Fyrsti hluti

1. Tuttugu og sex menn, númeraðir í röð frá 1 til 26, sitja við hringlaga borð með jöfnu millibili. Hvert er númer mannsins sem situr beint á móti manni númer 9?

 19 20 21 22

**Skýring:** Á venjulegri klukku, þar sem tölustöfunum 1 til 12 er raðað jafnt, er talan  $n + 6 = n + 12/2$  beint á móti  $n$ . Hér er uppsetningin svipuð nema hvað tölurnar eru 26 í stað 12. Beint á móti manni 9 er maður númer  $9 + 26/2 = 9 + 13 = 22$ .

2. Þríhyrningurinn  $ABC$  er jafnhliða og hálfhringur er reistur á hlið  $BC$  eins og sýnt er á mynd. Punkturinn  $D$  er miðpunktur hálfhringsins. Ef lengd  $AD$  er 1m, hver er hliðarlengd þríhyrningsins í metrum?

  $\frac{2}{3}$   $\frac{3}{4}$   $\frac{3 - \sqrt{3}}{2}$   $\sqrt{3} - 1$ 

**Skýring:** Ef geisli hringsins er táknaður með  $r$  þá eru hliðarlengdir þríhyrningsins  $2r$  og þar með er hæð þríhyrningsins  $\sqrt{(2r)^2 - r^2} = \sqrt{3}r$ . Þá má skrifa  $1 = AD = \sqrt{3}r + r$  og því fæst að  $r = 1/(1 + \sqrt{3})$ . Hliðarlengd þríhyrningsins er þá  $2r = 2/(1 + \sqrt{3}) = \sqrt{3} - 1$ .

3. Í kapphlaupi yrði  $A$  20 metrum á undan  $B$  í mark.  $B$  yrði 10 metrum á undan  $C$  í mark.  $A$  yrði 28 metrum á undan  $C$  í mark. Hversu langt er hlaupið ef hver keppandi hleypur með jöfnum hraða?

 58 m 100 m 116 m 200 m

**Skýring:** Ef við látum  $L$  tákna lengd hlaupsins og við táknum hraða hlauparanna með  $v_A, v_B, v_C$  og tímann sem það tekur þá að ljúka hlaupinu með  $t_A, t_B, t_C$  þá fást eftirfarandi jöfnur:

$$L - 20 = v_B t_A, \quad L - 10 = v_C t_B, \quad L - 28 = v_C t_A.$$

Ef við deilum í þriðju jöfnu með jöfnu eitt fæst  $(L - 28)/(L - 20) = v_C/v_B$ . En samkvæmt jöfnu tvö er  $v_C = (L - 10)/t_B$  því fæst eftirfarandi:

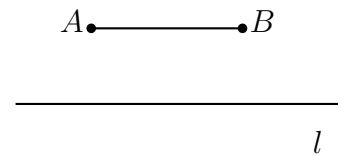
$$\frac{L - 28}{L - 20} = \frac{L - 10}{v_B t_B} = \frac{L - 10}{L} \Rightarrow -28L = -30L + 200 \Rightarrow L = 100.$$

4. Á Hlemmi hittist hópur stráka og stelpna. Í fyrsta strætisvagn fara 15 stelpur úr hópnum og eru þá tvöfalt fleiri strákar en stelpur eftir. Í næsta vagn fara 45 strákar úr hópnum og eru þá fimmfalt fleiri stelpur en strákar eftir. Hversu margar stelpur voru í hópnum sem hittist á Hlemmi?

 29 40 43 50

**Skýring:** Ef við táknum fjölda stelpna með  $y$  og fjölda stráka með  $x$  þá má túlka fyrri fullyrðinguna með jöfnunni  $2(y - 15) = x$  og seinni fullyrðinguna með jöfnunni  $5(x - 45) = y - 15$ . Ef jöfnurnar eru leystar saman fæst að fjöldi stelpna er  $y = 40$  (og fjöldi stráka er  $x = 50$ )

5. Látum  $l$  vera beina línu og  $AB$  vera strik sem er samsíða  $l$ . Strikið  $AB$  hefur lengdina 10 og fjarlægð punktanna  $A$  og  $B$  til línunnar  $l$  er 5. Hver er fjöldi ólíkra punkta  $P$  á línunni  $l$  þannig að punktarnir  $A$ ,  $B$  og  $P$  myndi jafnarma þríhyrning?

 2 3 4 5

**Skýring:** Ef dreginn er hringur með miðju í  $A$  og geisla  $AB$  þá mun sá hringur skera línuna  $l$  í tveimur ólíkum punktum  $P_{A1}$  og  $P_{A2}$  en hvor þessara punkta gefur jafnarma þríhyrning með topppunkt  $A$ . Þá mun hringur með geisla  $AB$  og miðju  $B$  skera línuna  $l$  í tveimur ólíkum punktum  $P_{B1}$  og  $P_{B2}$ . Þar sem lengd  $AB$  er 10 og fjarlægð punktanna  $A$  og  $B$  frá línunni  $l$  er 5 þá eru þessir fjórir punktar ólíkir. Fimmti punkturinn fæst með því að draga hornrétta línu gegnum miðpunkt  $AB$ . Sú lína mun skera línuna  $l$  í fimmta punktinum.

6. Ef

$$A + B = C, \quad C + D = E, \quad E + A = F, \quad B + D + F = 100, \quad A = 8,$$

hvert er gildið á  $F$ ?

 26 38 58 62

**Skýring:**  $F = E + A = C + D + A = A + B + D + A = 2A + B + D \Rightarrow 2F = 2A + B + D + F = 16 + 100 \Rightarrow F = 58$

7. Ef  $x + \frac{1}{x} = 3$  þá er  $x^3 + \frac{1}{x^3}$  jafnt

 15

 16

 17

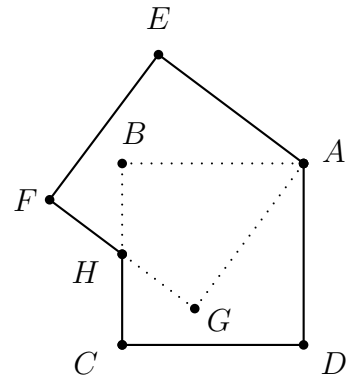
 18

**Skýring:** Setjum jöfnuna í þriðja veldi:

$$27 = \left(x + \frac{1}{x}\right)^3 = x^3 + 3x + \frac{3}{x} + \frac{1}{x^3} = x^3 + \frac{1}{x^3} + 3\left(x + \frac{1}{x}\right)$$

$$\Rightarrow x^3 + \frac{1}{x^3} = 27 - 3 \cdot 3 = 18.$$

8. Tveir ferningar,  $ABCD$  og  $AEFG$  eru með hliðarlengdir 1. Punkturinn  $H$  er miðpunktur beggja hliðanna  $BC$  og  $FG$ . Hvert er flatarmál  $AEFHCD$ ?


  $\sqrt{2}$ 
  $\frac{3}{2}$ 
  $\frac{4}{3}$ 
  $\sqrt{3}$ 

**Skýring:** Samanlagt flatarmál ferhyrninganna tvítelur flatarmál ferhyrningsins  $HBAG$ , en það flatarmál samanstendur af tveimur þríhyrningum með grunnlínu 1 og hæð  $1/2$ . Heildarflatamálið er því

$$ABCD + AEFG - HBAG = 1 + 1 - 2 \cdot \frac{1}{4} = \frac{3}{2}.$$

9. Munið að  $a^{b^c}$  er reiknað sem  $a^{(b^c)}$ . Ef

$$2^{2^x} + 4^{2^x} = 42,$$

hvert er gildið á  $\sqrt{2^{2^{2^x}}}$ ?

 4

 8

 16

 32

**Skýring:** Athugið að  $4^{2^x} = (2 \cdot 2)^{2^x} = (2^{2^x})^2 = y^2$  þar sem  $y = 2^{2^x}$ . Jöfnuna má því rita á forminu  $y + y^2 = 42$ , sem hefur lausnir  $y = 6$  eða  $y = -7$ . Þar sem  $y = 2^{2^x} > 0$  þá er  $y = 6$ . Þá fæst að  $\sqrt{2^{2^{2^x}}} = \sqrt{2^y} = \sqrt{2^6} = 8$ .

10. Gerum ráð fyrir að  $a_1, a_2, \dots, a_n$  og  $n$  séu jákvæðar heiltölur (ekki endilega ólíkar) þannig að

$$(x + a_1)(x + a_2) \cdots (x + a_n) = x^n + 261x^{n-1} + \cdots + 2008.$$

Hver eftirfarandi talna er möguleg sem  $n$ ?

7

12

63

669

**Skýring:** Ef margfaldað er upp úr svigunum þá verður

$$261 = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n \quad \text{og} \quad 2008 = a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdots a_n.$$

Sérhver talnanna  $a_1, \dots, a_n$  verður því að ganga upp í  $2008 = 2^3 \cdot 251$ . Ein talnanna verður að vera 251 og hinar tölurnar því veldi af 2 eða talan 1. Með því að prufa sig áfram má fá fram að summuna 261 má rita  $251 + 2^2 + 2 + 1 + 1 + 1 + 1$ . Hér eru 7 tölur. (Önnur möguleg gildi á  $n$  eru 4 og 8.)

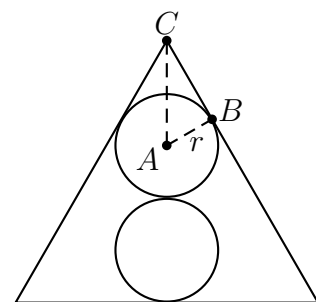
## Annar hluti

11. Andri og Goggi sitja í stólalyftu með stólum númeruðum í röð. Á sama augnabliki og Andri, í stól 96, mætir stól 105 þá mætir Goggi, í stól 241, stól 230. Hve margir stólar eru í stólalyftunni?

**Svar:** 270

**Skýring:** Af frásögninni að dæma má álykta að Andri og Goggi séu að ferðast í sömu átt. Því eru stólar 105 og 230 einnig að ferðast í sömu átt. Milli stóla 105 og 230 eru 124 stólar. Sami fjöldi stóla er því á milli Andra og Gogga. Af þessum 124 stólum eru 95 stólar, stólar 1–95, að baki Andra. Hinir  $124 - 95 = 29$  stólarnir eru í vaxandi röð fyrir framan Gogga og eru því númer 242–270.

12. Jafnhliða þríhyrningur hefur hliðarlengdir 1. Tveir hringar með sama geisla eru innritaðir í þríhyrninginn þannig að miðjur hringanna liggja á hæð í þríhyrningnum eins og sýnt er á myndinni. Hver er stærsti mögulegi geisli slíkra hringa?



**Svar:**  $\sqrt{3}/10$

**Skýring:** Þar sem þríhyrningurinn er jafnhliða eru öll horn hans  $60^\circ$ . Við látum  $A$  tákna miðju efri hringans og drögum geisla frá  $A$  yfir í punkt  $B$  þar sem hringurinn snertir hlið þríhyrningsins, eins og sýnt er á mynd. Þríhyrningurinn  $ABC$  er þá rétthyrndur með hvöss horn  $60^\circ$  og  $30^\circ$  og þar sem mótlæg hlið  $30^\circ$  hornsins er geisli hringans  $r$  þá er langhlið þríhyrningsins  $2r$ . Hæð jafnhliða þríhyrningsins er því  $5r$ . En hinsvegar þá má reikna hæðina sem  $\sqrt{3}/2$ . Því fæst að  $5r = \sqrt{3}/2$  eða  $r = \sqrt{3}/10$

13. Tveir flutningaprammar sigla fram og til baka með jöfnum hraða. Prammarnir leggja af stað, hvor frá sínum árbakka, á sama augnabliki og mætast 700 metra frá öðrum árbakkanum; halda ferð sinni áfram án þess að stoppa og mætast næst 400 metra frá hinum árbakkanum. Hversu breið er áin?

**Svar:** 1700 m

**Skýring:** Þegar prammarnir mætast fyrst hafa þeir til samans siglt sem nemur breidd árinna og þegar þeir mætast næst þá hafa þeir þeir til samans siglt sem nemur þrefaldri breidd árinna. Ef prammarnir mætast fyrst eftir tímann  $t_1$  þá mætast þeir næst eftir tímann  $t_1 + 2t_1$  vegna þess að þeir sigla með jöfnum hraða. Ef við fylgjum prammanum sem siglt hefur 700 metra við fyrsta fund þá hefur sá prammi siglt  $700 + 2 \cdot 700 = B + 400$  metra við annan fund, þar sem  $B$  er breidd árinna. Breidd árinna er því  $B = 2100 - 400 = 1700$  metrar.

14. Í hópi nokkrum eru læknar og kennarar. Meðalaldur allra í hópnum er 40 ár. Meðalaldur læknanna í hópnum er 35 ár, en meðalaldur kennaranna í hópnum er 50 ár. Hvert er hlutfallið milli fjölda lækna og fjölda kennara í hópnum?

**Svar:** 2 : 1

**Skýring:** Ef við táknum samanlagðan aldur lækna með  $a_L$ , fjölda lækna með  $f_L$ , samanlagðan aldur kennara með  $a_K$  og fjölda kennara með  $f_K$  þá viljum við finna  $f_L/f_K$ . Gefið er eftirfarandi:

$$a_L + a_K = 40(f_L + f_K), \quad a_L = 35f_L, \quad a_K = 50f_K.$$

Því fæst

$$35f_L + 50f_K = 40(f_L + f_K) \quad \Leftrightarrow \quad 35\frac{f_L}{f_K} + 50 = 40\left(\frac{f_L}{f_K} + 1\right) = 40\frac{f_L}{f_K} + 40.$$

Því fæst:  $\frac{f_L}{f_K} = 2$ .

15. Ef  $a$ ,  $a + b$  og  $a + 9b$  eru hliðarlengdir í rétthyrndum þríhyrningi og  $a, b > 0$  hvað er þá  $\frac{a}{b}$ ?

**Svar:** 20

**Skýring:** Jafna Pýþagorasar gefur að  $a^2 + (a + b)^2 = (a + 9b)^2$ . Ef margfaldað eru upp úr svigum og einfaldað fæst jafnan  $a^2 - 16ab - 80b^2 = 0$ . Þáttun gefur  $(a + 4b)(a - 20b) = 0$  og því er  $a/b = -4$  eða  $a/b = 20$ . Þar sem bæði  $a$  og  $b$  eru jákvæðar tölur er  $a/b = 20$  eina mögulega svarið.

## Þriðji hluti

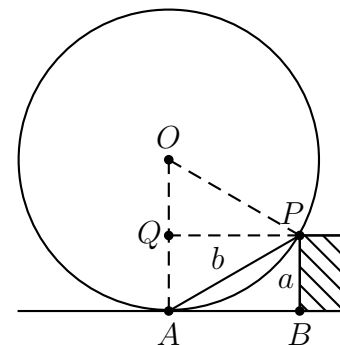
16. Ræðu töluna  $\frac{2}{7}$  má skrifa sem summu tveggja einingarbrota  $\frac{1}{a} + \frac{1}{b}$  þar sem  $0 < a < b$  eru heilar tölur. Hver er summan  $a + b$ ?

**Lausn:** Brotin  $1/a$  og  $1/b$  geta ekki bæði verið stærri en  $1/7$  því þá yrði summan  $1/a + 1/b$  stærri en  $2/7$ . Sömuleiðis geta brotin ekki verið bæði minni en  $1/7$ . Annað brotið er því stærra en  $1/7$  og hitt er minna en  $1/7$ . Þar sem  $0 < a < b$  þá er  $1/a > 1/b$  og því er  $1/a > 1/7$ . Þar sem  $a$  er heiltala þá eru tölurnar 1, 2, 3, 4, 5, 6 einu mögulegu gildin á  $a$ . Af þessum mögulegu gildum á  $a$  má útiloka 1, 2 og 3 þar sem  $1/1$ ,  $1/2$  og  $1/3$  eru stærri en  $2/7$ . Nú er  $1/b = 2/7 - 1/a = (2a - 7)/(7a)$  og því  $b = 7a/(2a - 7)$ . Nú prufum við þau einu gildi sem  $a$  getur haft:

$$\begin{aligned} a = 4 : \quad b &= \frac{7 \cdot 4}{2 \cdot 4 - 7} = 28 \\ a = 5 : \quad b &= \frac{7 \cdot 5}{2 \cdot 5 - 7} = \frac{35}{3} \\ a = 6 : \quad b &= \frac{7 \cdot 6}{2 \cdot 6 - 7} = \frac{42}{5} \end{aligned}$$

Aðeins möguleiki  $a = 4$  gefur  $b$  sem heiltölu,  $b = 28$  og sannarlega er  $1/4 + 1/28 = 2/7$ . Tölurnar  $a$  og  $b$  eru því 4 og 28 og summan er  $a + b = 32$ .

17. Hjól liggur að kantsteini. Hæð kantsteinsins er  $a$ . Fjarlægðin frá punktinum sem hjólið hvílir á að efri brún kantsteinsins er  $b$  (sjá mynd). Hver er geisli hjólsins?



**Lausn:** Köllum miðju hjólsins  $O$  og drögum tvo geisla, einn í punktinn  $A$ , sem hjólið hvílir á, og annan í punktinn  $P$ , snertipunkt hjólsins og kantsteinsins. Framlengjum svo efri brún kantsteins yfir í punkt  $Q$ , skurðpunkt framlengingar og geisla. Ef við notum reglu Pýþagórasar á þríhyrninginn  $ABP$  fæst að  $AB = \sqrt{b^2 - a^2}$  og þar með má álykta að  $QP = \sqrt{b^2 - a^2}$ . Ef við táknum geisla hjólsins með  $r$  fæst að  $OQ = r - a$ . Beitung loks reglu Pýþagórasar á þríhyrninginn  $OQP$  og fáum

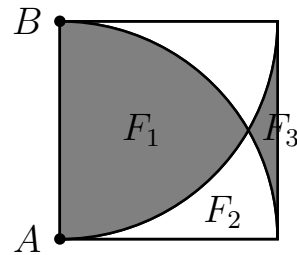
$$\begin{aligned} r^2 &= (r - a)^2 + (\sqrt{b^2 - a^2})^2 \\ &= r^2 - 2ar + a^2 + b^2 - a^2 \\ \Leftrightarrow 0 &= -2ar + b^2 \\ \Leftrightarrow r &= \frac{b^2}{2a} \end{aligned}$$

18. Fyrir hversu mörg pör frumtalna  $(p, q)$  má finna heiltölu  $n$  þannig að

$$(p^2 + 1)(q^2 + 1) = n^2 + 1?$$

**Lausn:** Við sýnum fyrst að önnur talnanna  $p$  eða  $q$  verður að vera 2. Annars væru  $p$  og  $q$  tvær oddatölur og margfeldið  $(p^2 + 1)(q^2 + 1)$  slétt tala sem er deilanleg með 4. Því yrði  $n^2 + 1$  að vera deilanleg með 4. Sér í lagi yrði  $n$  að vera oddatala,  $n = 2k + 1$ , en þá verður  $n^2 + 1 = 4k^2 + 4k + 2$ , sem er ekki deilanleg með 4. Önnur talnanna  $p$  eða  $q$  verður því að vera 2. Gefnu jöfnuna má þá skrifa á forminu  $5(x^2 + 1) = n^2 + 1$  þar sem  $x = p$  eða  $x = q$ . Nú er  $5x^2 = n^2 - 4 = (n+2)(n-2)$ . Þar sem 5 og  $x$  eru frumtölur, þá eru möguleikarnir á að þátta  $5x^2$  í tvo þætti eftirfarandi:  $1 \cdot (5x^2)$ ,  $5 \cdot (x^2)$  og  $x \cdot (5x)$ . Við megum gera ráð fyrir að  $n > 0$ , en þá er þátturinn  $n - 2$  minni en  $n + 2$  og því verður  $n - 2 \in \{1, 5, x\}$ . (Vitum að  $5 < x^2$  vegna þess að  $x \geq 3$ .) Skoðum þessa þrjá möguleika: (i)  $n = 3$  gefur  $5x^2 = 5 \cdot 1 = 5$ , (ii)  $n = 7$  gefur  $5x^2 = 9 \cdot 5 = 45$  og (iii)  $n = x + 2$  gefur  $5x^2 = x(x + 4)$ . Eina frumtölulausnin á þessum jöfnum er  $x = 3$  sem fæst í tilfalli (ii). Þar með fæst að  $(p, q)$  er  $(3, 2)$  eða  $(2, 3)$ . Bæði þessi pör leysa gefnu jöfnuna, með  $n = \pm 7$ .

19. Í ferning með hliðarlengdir 1 eru inritaðir tveir hringbogar með geisla 1 eins og sýnt er á mynd. Annar hringboginn hefur miðju í  $A$  og hinn hringboginn hefur miðju í  $B$ . Hver er mismunur flatarmála skyggðu svæðanna?



**Lausn:** Ef við köllum skyggðu svæðin tvö  $F_1$  og  $F_3$  og annað óskyggðu svæðanna  $F_2$  þá fáum við eftirfarandi jöfnur:

$$F_1 + F_2 = \frac{\pi}{4} \quad F_2 + F_3 = 1 - \frac{\pi}{4}.$$

Við frádrátt fæst:  $F_1 - F_3 = (F_1 + F_2) - (F_2 + F_3) = \frac{\pi}{4} - \left(1 - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{2} - 1$ .

Við þökkum öllum þeim sem tóku þátt og aðstoðuðu við keppnina.

Auðun Sæmundsson  
Friðrik Diego  
Gunnar Freyr Stefánsson

Einar Arnalds Jónasson  
Guðbjörn Freyr Jónsson