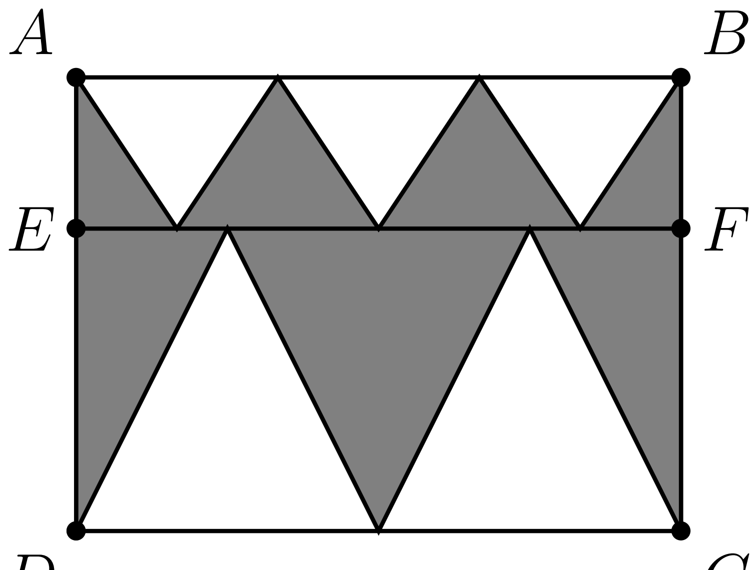
Íslenska stærðfræðafélagið
Félag raungreinakennara í framhaldsskólum

Stærðfræðikeppni framhaldsskólanema 2008-2009

Svör og lausnir

Neðra stig



Glitnir styrkir Stærðfræðikeppni framhaldsskólanema

Fyrsti hluti

1. Hvert er gildi margfeldisins $\left(2+\frac{1}{2}+\frac{3}{4}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{3}\right)$?

☐ $\frac{19}{3}$ ☐ $\frac{17}{3}$ ☐ $\frac{14}{3}$ ☒ $\frac{13}{3}$

Skýring: $\left(2+\frac{1}{2}+\frac{3}{4}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{3}\right)=\frac{8+2+3}{4}\cdot\frac{3+1}{3}=\frac{13}{4}\cdot\frac{4}{3}=\frac{13}{3}$

2. Tuttugu og sex menn, númeraðir í röð frá 1 til 26, sitja við hringlaga borð með jöfnu millibili. Hvert er númer mannsins sem situr beint á móti manni númer 9?

☐ 19 ☐ 20 ☐ 21 ☒ 22

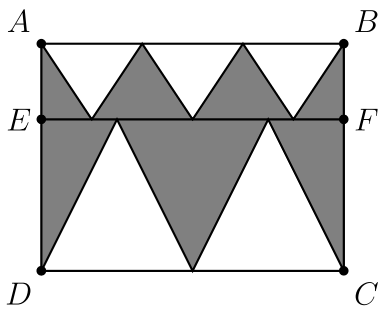
Skýring: Á venjulegri klukku, þar sem tölustöfunum 1 til 12 er raðað jafnt er talan $n+6=n+12/2$ beint á móti n. Hér er uppsetningin svipuð nema hvað tölurnar eru 26 í stað 12. Beint á móti manni 9 er maður númer $9+26/2=9+13=22$.

3. Fjórir vinir fara að veiða og koma heim með samtals 11 fiska. Ef hver vinanna veiddi að minnsta kosti einn fisk, hver eftirtalinna fullyrðinga verður að teljast rétt?

☐ Einhver vinanna veiddi nákvæmlega 3 fiska
☒ Einhver vinanna veiddi færri en 3 fiska
☐ Einhver vinanna veiddi fleiri en 3 fiska
☐ Nákvæmlega tveir vinanna veiddu fleiri en 1 fisk

Skýring: Ef við látum x, y, z og w tákna fjölda fiska sem hver vinanna veiddi. Þá á $x+y+z+w=11$. Skiptingin $(x,y,z,w)=(1,1,1,8)$ sýnir að fyrsti og síðasti svarmöguleiki eru rangir. Skiptingin $(3,3,3,2)$ sýnir að þriðji svarmöguleiki er rangur. Einhver vinanna verður að hafa veitt færri en þrjá fiska því annars hefðu þeir komið heim með a.m.k. tólf fiska. Annar svarmöguleiki er því réttur.

4. Á myndinni sjást tveir ferhyrningar, $ABCD$ og $CDEF$. Lengd AB er 4 og lengd BC er 3. Hvert er flatarmál skyggða svæðisins ?



☐ 4 ☐ 5 ☒ 6 ☐ 7

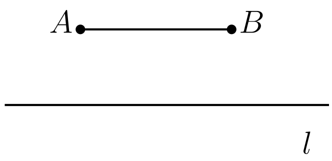
Skýring: Nákvæm staðsetning línunnar EF er málinu óviðkomandi og svo er einnig með þá hornpunkta þríhyrninganna sem eru inni á strikunum AB, EF og DC. Í hvorum ferhyrningnum sem er þá er flatarmál skyggða svæðisins alltaf helmingur af flatarmáli ferhyrningsins. Heildarflatarmál skyggða svæðisins er því helmingur af flatarmáli ferhyrningsins $ABCD$ eða 6.

5. Á Hlemmi hittist hópur stráka og stelpna. Í fyrsta strætisvagn fara 15 stelpur úr hópnum og eru þá tvöfalt fleiri strákar en stelpur eftir. Í næsta vagn fara 45 strákar úr hópnum og eru þá fimmfalt fleiri stelpur en strákar eftir. Hversu margar stelpur voru í hópnum sem hittist á Hlemmi?

☐ 29 ☒ 40 ☐ 43 ☐ 50

Skýring: Ef við táknum fjölda stelpna með y og fjölda stráka með x þá má túlka fyrri fullyrðinguna með jöfnunni $2(y-15) = x$ og seinni fullyrðinguna með jöfnunni $5(x-45) = y-15$. Ef jöfnurnar eru leystar saman fæst að fjöldi stelpna er $y = 40$ (og fjöldi stráka er $x = 50$)

6. Látum l vera beina línu og AB vera strik sem er samsíða l. Strikið AB hefur lengdina 10 og fjarlægð punktanna A og B til línunnar l er 5. Hver er fjöldi ólíkra punkta P á línunni l þannig að punktarnir A, B og P myndi jafnarma þríhyrning?



☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5

Skýring: Ef dreginn er hringur með miðju í A og geisla AB þá mun sá hringur skera línuna l í tveimur ólíkum punktum P_{A1} og P_{A2} en hvor þessara punkta gefur jafnarma þríhyrning með topppunkt A. Þá mun hringur með geisla AB og miðju B skera línuna l í tveimur ólíkum punktum P_{B1} og P_{B2}. Þar sem lengd AB er 10 og fjarlægð punktanna A og B frá línunni l er 5 þá eru þessir fjórir punktar ólíkir. Fimmti punkturinn fæst með því að draga hornrétta línu gegnum miðpunkt AB. Sú lína mun skera línuna l í fimmta punktinum.

7. Fimm tölum er raðað eftir stærð. Meðaltal talnanna fimm er 28 en meðaltal þriggja miðtalnanna er 26. Hvert er meðaltal minnstu og stærstu tölunnar?

☐ 30 ☒ 31 ☐ 32 ☐ 33

Skýring: Ef við táknum tölurnar, í vaxandi röð, með a_1, a_2 a_3, a_4 og a_5 þá er gefið að $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 = 5 \cdot 28$ og $a_2 + a_3 + a_4 = 3 \cdot 26$. Þá er meðaltal minnstu og stærstu tölunnar $(a_1 + a_5)/2 = (5 \cdot 28 - 3 \cdot 26)/2 = 62/2 = 31$

8. Ef

$$a + 1 = b + 2 = c + 3 = d + 4 = a + b + c + d + 5,$$

hvert er gildið á $a + b + c + d$?

☒ $-10/3$ ☐ $-1/2$ ☐ 1 ☐ 2

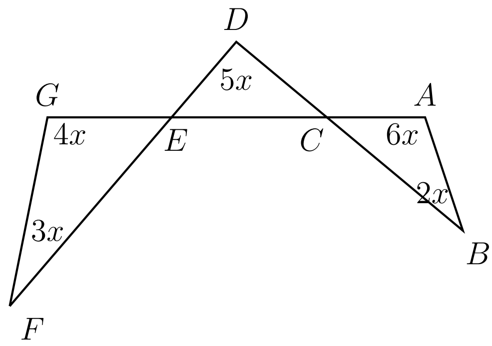
Skýring: Annars vegar er $(a+1)+(b+2)+(c+3)+(d+4) = (a+b+c+d)+10$. Hinsvegar er $(a + 1) + (b + 2) + (c + 3) + (d + 4) = 4(a + b + c + d + 5) = 4(a + b + c + d) + 20$. Því fæst: $(a + b + c + d) + 10 = 4(a + b + c + d) + 20$ eða $3(a + b + c + d) = -10$. Þar með fæst að $a + b + c + d = -10/3$.

9. Hversu margar heiltölur milli 100 og 500 innihalda enga sléttan tölustaf?

☐ 35 ☒ 50 ☐ 75 ☐ 80

Skýring: Við táknum slíka tölu með abc. Þar sem talan abc er minni en 500 þá getur a verið 1 eða 3. Tölustafirnir b og c geta svo verið 1, 3, 5, 7 eða 9. Fjöldi slíkra talna er $2 \cdot 5 \cdot 5 = 50$

10. Hver er stærð hornsins $\angle CAB$ á myndinni hér til hliðar?



☐ 104° ☐ 106° ☒ 108° ☐ 110°

Skýring: Við leitum að stærð hornsins $6x$. Athugum þríhyrninginn EDC og notum að hornasumman er 180°:

$$(180^\circ - 7x) + 5x + (180^\circ - 8x) = 180^\circ.$$

Þessi jafna gefur $x = 18^\circ$. Því er $\angle CAB = 6x = 108^\circ$

Annar hluti

11. Munið að a^{b^c} er reiknað sem $a^{(b^c)}$. Ef

$$2^{2^x} + 4^{2^x} = 42,$$

hvert er gildið á $\sqrt{2^{2^{2^x}}}$?

☐ 2 ☐ 4 ☒ 8 ☐ 16 ☐ 32

Skýring: Athugið að $4^{2^x} = (2 \cdot 2)^{2^x} = (2^{2^x})^2 = y^2$ þar sem $y = 2^{2^x}$. Jöfnuna má því rita á forminu $y + y^2 = 42$, sem hefur lausnir $y = 6$ eða $y = -7$. Þar sem $y = 2^{2^x} > 0$ þá er $y = 6$. Þá fæst að $\sqrt{2^{2^{2^x}}} = \sqrt{2^y} = \sqrt{2^6} = 8$.

12. Gerum ráð fyrir að $a_1, a_2, \ldots, a_n$ og n séu jákvæðar heiltölur (ekki endilega ólíkar) þannig að

$$(x + a_1)(x + a_2) \cdots (x + a_n) = x^n + 261x^{n-1} + \cdots + 2008.$$

Hver eftirfarandi talna er mögulegt gildi á n?

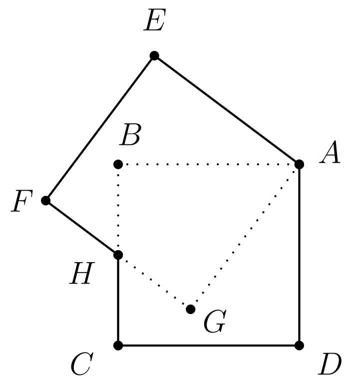
☒ 7 ☐ 12 ☐ 63 ☐ 669 ☐ 2008

Skýring: Ef margfaldað er upp úr svigunum þá verður

$$261 = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n \quad \text{og} \quad 2008 = a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \ldots a_n.$$

Sérhver talnanna $a_1, \ldots a_n$ verður því að ganga upp í $2008 = 2^3 \cdot 251$. Ein talnanna verður að vera 251 og hinar tölurnar því veldi af 2 eða talan 1. Með því að prufa sig áfram má fá fram að summuna 261 má rita $251+2^2+2+1+1+1+1$. Hér eru 7 tölur. (Önnur möguleg gildi á n eru 4 og 8.)

13. Tveir ferhyrningar, $ABCD$ og $AEFG$ eru með hliðarlengdir 1. Punkturinn H er miðpunktur beggja hliðanna BC og FG. Hvert er flatarmál $AEFHCD$?



☐ $\sqrt{2}$ ☐ $\frac{\sqrt{5}}{2}$ ☒ $\frac{3}{2}$ ☐ $\frac{4}{3}$ ☐ $\sqrt{3}$

Skýring: Samanlagt flatarmál ferhyrninganna tvítelur flatarmál ferhyrningsins $HBAG$, en það flatarmál samanstendur af tveimur þríhyrningum með grunnlínu 1 og hæð 1/2. Heildarflatamálið er því

$$ABCD + AEFG - HBAG = 1 + 1 - 2 \cdot \frac{1}{4} = \frac{3}{2}.$$

14. Í kapphlaupi yrði A 20 metrum á undan B í mark. B yrði 10 metrum á undan C í mark. A yrði 28 metrum á undan C í mark. Hversu langt er hlaupið ef hver keppandi hleypur með jöfnum hraða?

☐ 58 m ☐ 80 m ☒ 100 m ☐ 118 m ☐ 160 m

Skýring: Ef við látum L tákna lengd hlaupsins og við táknum hraða hlauparanna með v_A, v_B, v_C og tímann sem það tekur þá að ljúka hlaupinu með t_A, t_B, t_C þá fást eftirfarandi jöfnur:

$$L - 20 = v_B t_A, \qquad L - 10 = v_C t_B, \qquad L - 28 = v_C t_A.$$

Ef við deilum í þriðju jöfnu með jöfnu eitt fæst $(L-28)/(L-20) = v_C/v_B$. En samkvæmt jöfnu tvö er $v_C = (L-10)/t_B$ því fæst eftirfarandi:

$$\frac{L-28}{L-20} = \frac{L-10}{v_B t_B} = \frac{L-10}{L} \quad \Rightarrow \quad -28L = -30L + 200 \quad \Rightarrow \quad L = 100.$$

15. Látum n vera jákvæða heila tölu. Ef deilt er í n með 7 þá er afgangurinn 5. Hver verður afgangurinn ef deilt er í $5 \cdot n$ með 7?

☐ 1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☐ 5

Skýring: Þar sem afgangurinn er 5 þegar deilt er með 7 má skrifa $n = 7k + 5$. Þá verður $5n = 35k + 25 = 7(5k + 3) + 4$ svo afgangurinn þegar deilt er með 7 í $5n$ er 4.

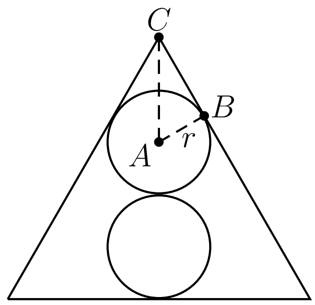
Þriðji hluti

16. Andri og Goggi sitja í stólalyftu með stólum númeruðum í röð. Á sama augnabliki og Andri, í stól 96, mætir stól 105 þá mætir Goggi, í stól 241, stól 230. Hve margir stólar eru í stólalyftunni?

Svar: 270

Skýring: Af frásögninni að dæma má álykta að Andri og Goggi séu að ferðast í sömu átt. Því eru stólar 105 og 230 einnig að ferðast í sömu átt. Milli stóla 105 og 230 eru 124 stólar. Sami fjöldi stóla er því á milli Andra og Gogga. Af þessum 124 stólum eru 95 stólar, stólar 1–95, að baki Andra. Hinir $124-95 = 29$ stólarnir eru í vaxandi röð fyrir framan Gogga og eru því númer 242–270.

17. Jafnhliða þríhyrningur hefur hliðarlengdir 1. Tveir hringar með sama geisla eru innritaðir í þríhyrninginn þannig að miðjur hringanna liggja á hæð í þríhyrningnum eins og sýnt er á myndinni. Hver er stærsti mögulegi geisli slíkra hringa?



Svar: $\sqrt{3}/10$

Skýring: Þar sem þríhyrningurinn er jafnhliða eru öll horn hans 60°. Við látum A tákna miðju efri hringsins og drögum geisla frá A yfir í punkt B þar sem hringurinn snertir hlið þríhyrningsins, eins og sýnt er á mynd. Þríhyrningurinn ABC er þá rétthyrndur með hvöss horn 60° og 30° og þar sem mótlæg hlið 30° hornsins er geisli hringsins r þá er langhlið þríhyrningsins $2r$. Hæð jafnhliða þríhyrningsins er því $5r$. En hinsvegar þá má reikna hæðina sem $\sqrt{3}/2$. Því fæst að $5r = \sqrt{3}/2$ eða $r = \sqrt{3}/10$

18. Í hópi nokkrum eru læknar og kennarar. Meðalaldur allra í hópnum er 40 ár. Meðalaldur læknanna í hópnum er 35 ár, en meðalaldur kennaranna í hópnum er 50 ár. Hvert er hlutfallið milli fjölda lækna og fjölda kennara í hópnum?

Svar: 2 : 1

Skýring: Ef við táknum samanlagðan aldur lækna með a_L, fjölda lækna með f_L, samanlagðan aldur kennara með a_K og fjölda kennara með f_K þá viljum við finna f_L/f_K. Gefið er eftirfarandi:

$$a_L + a_K = 40(f_L + f_K), \qquad a_L = 35f_L, \qquad a_K = 50f_K.$$

Því fæst

$$35f_L + 50f_K = 40(f_L + f_K) \quad \Leftrightarrow \quad 35\frac{f_L}{f_K} + 50 = 40\left(\frac{f_L}{f_K} + 1\right) = 40\frac{f_L}{f_K} + 40.$$

Því fæst: $\dfrac{f_L}{f_K} = 2.$

19. Summa 2008 samliggjandi heilla talna er 3012. Hver er stærsta talan í summunni?

Svar: 1005

Skýring: Við athugum fyrst að heilu tölurnar geta ekki allar verið jákvæðar þar sem slík summa yrði allt of há. Einhverjar heiltölur verða því að vera neikvæðar. Þar sem tölurnar eru samliggjandi þá mun sérhver neikvæð tala í summunni eiga sér jákvæða hliðstæðu og verða jákvæðu tölurnar því að vera fleiri en þær neikvæðu svo summan verði 3012. Við leitum því að summu á forminu

$$-a-(a-1)-\cdots-3-2-1+0+1+2+3+\cdots+(a-1)+a+(a+1)+\cdots+(a+k)$$

Fjöldi talna frá $-a$ til a er $2a+1$ og ef við prófum okkur áfram fæst:

$-1003 - 1002 - \cdots - 1 + 0 + 1 + \cdots + 1002 + 1003 + (1004) = 1004$ of lágt!
$-1002 - \cdots - 1 + 0 + 1 + \cdots + 1002 + (1003 + 1004 + 1005) = 3012$ passar!

Stærsta talan í summunni er því 1005.

20. n er náttúrleg tala þannig að $2n+3$ gengur upp í $6n+43$. Hvaða tala er n?

Svar: 7

Skýring: Við deilum $2n+3$ í $6n+43$:

$$\frac{6n+43}{2n+3} = \frac{3(2n+3)+34}{2n+3} = 3 + \frac{34}{2n+3}.$$

Talan $2n+3$ verður því að ganga upp í $34 = 2 \cdot 17$. En $2n+3$ er oddatala og stærri en 1, svo að eini möguleikinn er að $2n+3 = 17$ og þar með er $n = 7$.

Fjórði hluti

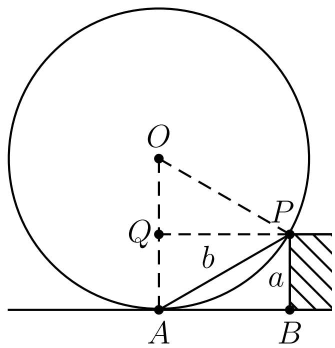
21. Ræðu töluna $\dfrac{2}{7}$ má skrifa sem summu tveggja einingarbrota $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}$ þar sem $0<a<b$ eru heilar tölur. Hver er summan $a+b$?

Lausn: Brotin $1/a$ og $1/b$ geta ekki bæði verið stærri en $1/7$ því þá yrði summan $1/a+1/b$ stærri en $2/7$. Sömuleiðis geta brotin ekki verið bæði minni en $1/7$. Annað brotið er því stærra en $1/7$ og hitt er minna en $1/7$. Þar sem $0<a<b$ þá er $1/a>1/b$ og því er $1/a>1/7$. Þar sem a er heiltala þá eru tölurnar $1,2,3,4,5,6$ einu mögulegu gildin á a. Af þessum mögulegu gildum á a má útiloka 1, 2 og 3 þar sem $1/1$, $1/2$ og $1/3$ eru stærri en $2/7$. Nú er $1/b=2/7-1/a=(2a-7)/(7a)$ og því $b=7a/(2a-7)$. Nú prufum við þau einu gildi sem a getur haft:

$$\begin{array}{ll} a=4: & b=\dfrac{7\cdot 4}{2\cdot 4-7}=28 \\ a=5: & b=\dfrac{7\cdot 5}{2\cdot 5-7}=\dfrac{35}{3} \\ a=6: & b=\dfrac{7\cdot 6}{2\cdot 6-7}=\dfrac{42}{5} \end{array}$$

Aðeins möguleiki $a=4$ gefur b sem heiltölu, $b=28$ og sannarlega er $1/4+1/28=2/7$. Tölurnar a og b eru því 4 og 28 og summan er $a+b=32$.

22. Hjól liggur að kantsteini. Hæð kantsteinsins er a. Fjarlægðin frá punktinum sem hjólið hvílir á að efri brún kantsteinsins er b (sjá mynd). Hver er geisli hjólsins?



Lausn: Köllum miðju hjólsins O og drögum tvo geisla, einn í punktinn A, sem hjólið hvílir á, og annan í punktinn P, snertipunkt hjólsins og kantsteinsins. Framlengjum svo efri brún kantsteins yfir í punkt Q, skurðpunkt framlengingar og geisla. Ef við notum reglu Pýþagórasar á þríhyrninginn ABP fæst að $AB=\sqrt{b^2-a^2}$ og þar með má álykta að $QP=\sqrt{b^2-a^2}$. Ef við táknum geisla hjólsins með r fæst að $OQ=r-a$. Beitum loks reglu Pýþagórasar á þríhyrninginn OQP og fáum

$$\begin{array}{rrcl} & r^2 & = & (r-a)^2+(\sqrt{b^2-a^2}\,)^2 \\ & & = & r^2-2ar+a^2+b^2-a^2 \\ \Leftrightarrow & 0 & = & -2ar+b^2 \\ \Leftrightarrow & r & = & \dfrac{b^2}{2a} \end{array}$$

Við þökkum öllum þeim sem tóku þátt og aðstoðuðu við keppnina.

Auðun Sæmundsson
Einar Arnalds Jónasson
Friðrik Diego
Guðbjörn Freyr Jónsson
Gunnar Freyr Stefánsson