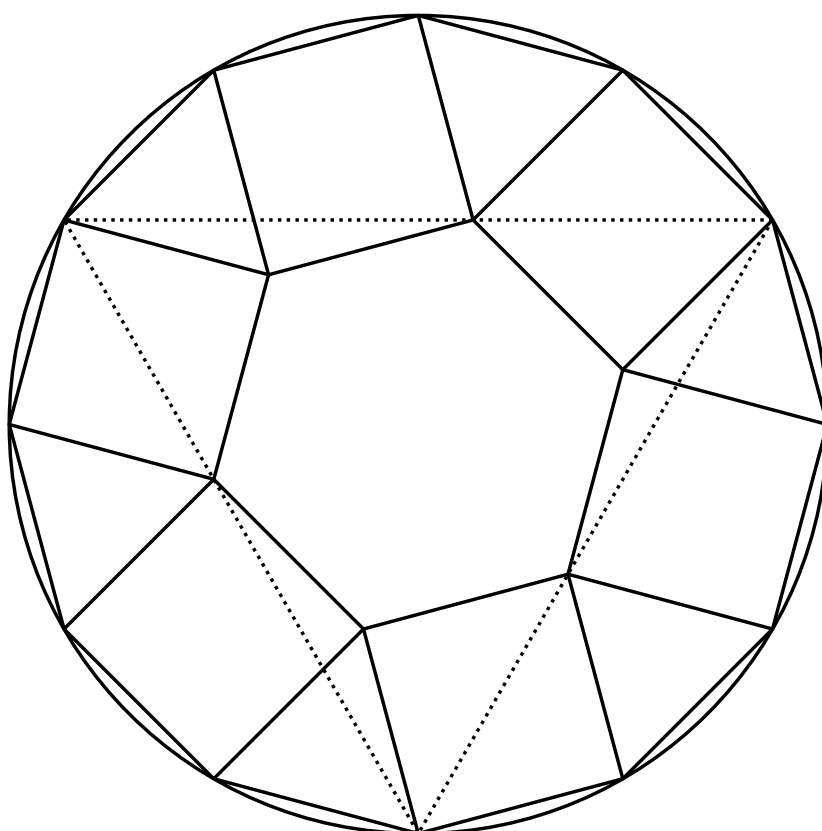


Íslenska stærðfræðafélagið
Félag raungreinakennara í framhaldsskólum

Stærðfræðikeppni framhaldsskólanema 2025–2026

Svör og lausnir



Fyrsti hluti

1. Edda og Atli eru að skokka 10km hring. Þau halda bæði föstum hraða alla leið. Þegar Atli er hálfnaður á Edda aðeins þriðjung eftir. Hvað verður Atli búinn með hátt hlutfall hringsins þegar Edda lýkur hlaupi sínu?

☐ 5/8☐ 2/3☒ 3/4☐ 7/8

Skýring. Ef það tók Eddu tíma x að vera búinn með $2/3$ mun þurfa $3/2x$ til að ljúka hringnum. Því mun Atli vera búinn með $3/2 \cdot 1/2 = 3/4$ af hringnum.

2. Í frægri stærðfræðikeppni með 100 dæmum eru gefin annaðhvort 3, 6 eða 10 stig fyrir að leysa dæmi. Fyrir óleyst dæmi fást 0 stig. Hvað af eftirfarandi stigafjöldum er ekki hægt að fá á keppninni? (Til dæmis er hvorki hægt að fá 4 né 5 stig).

☐ 15☒ 17☐ 27☐ 64

Skýring.

- 15 má fá með 5 þristum.
- 27 með 9 þristum.
- 64 má fá með 8 þristum og 4 tíum.

Svarið er því 17. Þar sem 3 og 6 eru deilanleg með 3 þá er framlag stiga sem fást með þeim deilanlegt með 3. Nú er $17 < 2 \cdot 10$ svo að til að fá 17 stig þyrfti að fá í mesta lagi einu sinni 10 stig fyrir dæmi. Nú eru $17 = 17 - 0 \cdot 10$ og $7 = 17 - 1 \cdot 10$ hvorug deilanleg með 3 svo það er ógerningur að fá 17 stig.

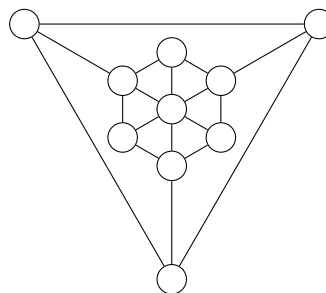
3. Matthías keyrir norður til Akureyrar á hraðanum 80km/klst að meðaltali en lendir svo í hryllilegu óveðri og umferðarteppu á leiðinni suður og ekur bakaleiðina að meðaltali á 20 km/klst. Hver var meðalhraði hans í heildina?

☒ 32 km/klst☐ 40 km/klst☐ 48 km/klst☐ 50 km/klst

Skýring. Segjum að leiðin sé x kílómetrar. Þá keyrði Matthías á 80 í $x/80$ klst. Einnig keyrði hann á 20 í $x/20$ klst. Samtals tók þá ferðin $x/80 + x/20 = x/16$ klst til að keyra fjarlægðina $2x$, sem gefur hraða upp á $2x/(x/16) = 32$.

4. Ingfríður litar hringina á myndinni hér til hliðar. Engir hringir sem eru tengdir með striki mega vera í sama lit. Hver er minnsti fjöldi lita sem Ingfríður þarf að nota?

☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☐ 5



Skýring. Þar sem 3 hringir eru allir tengdir duga ekki 2 litir, þeir þurfa allir að vera ólíkir. Reynum þá 3 liti. Ef við litum miðjuna rauða þurfa allir sex í kringum hann að vera grænir og bláir til skiptis. En ystu þrír hringirnir þurfa allir að vera í ólíkum lit, en geta ekki notað grænan. Því þurfum við einn lit enn, og getum þá látið ystu vera rauðan, bláan og gulan. Svarið er því 4.

5. Rithátturinn ndm táknar að maður eigi að kasta n teningum með m hliðum með tölum $1, 2, \dots, m$ og leggja saman niðurstöður. Til dæmis merkir $2d6$ að kasta eigi tveimur venjulegum sex hliða teningum og leggja saman niðurstöður þeirra. Hver af eftirfarandi valkostum gefur að meðallagi hæsta svarið?

☐ $4d4$ ☐ $3d6$ ☒ $2d10$ ☐ $1d20$

Skýring. Meðalniðurstaða á n -hliða teningi er $(1 + \dots + n)/n = (n + 1)/2$. Meðalniðurstaðan fyrir alla teningan er summa meðaltals hvers tenings svo reikna má meðalniðurstöður 10, 10.5, 11, 10.5 svo $2d10$ er svarið.

6. Gefið er að $x + \frac{1}{x} = 45$, hvert er þá gildi $x^2 + \frac{1}{x^2}$?

☒ 2023 ☐ 2024 ☐ 2025 ☐ 2026

Skýring. Við sjáum að $(x + 1/x)^2 = x^2 + 2 + 1/x^2$ svo $x^2 + \frac{1}{x^2} = (x + 1/x)^2 - 2 = 45^2 - 2 = 2023$.

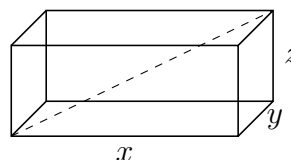
7. Þú dregur tvö spil úr venjulegum spilastokku með 52 spilum. Hverjar eru líkurnar á að þú dregur spilin í strangt vaxandi röð? Stærðarröð spila er ás, tvistur, þristur, $\dots$, tíá, gosi, drottning, kóngur. Strangt vaxandi röð þýðir að seinna spilið er stærra en það fyrra. Fyrra spilið er ekki sett aftur í stokkinn áður en það seinna er dregið.

☐ $6/13$ ☒ $24/51$ ☐ $25/52$ ☐ $1/2$

Skýring. Líkurnar á að spilin séu með ólík gildi er $48/51$ því það eru 3 önnur af

fyrsta spili meðal 51 sem þarf að forðast. Í helming allra skipta sem tvö ólík gildi eru dregin kemur það stærra á eftir, svo svarið er $24/51$.

8. Kassi sem er rétthyrndur á alla kanta hefur lengd x , breidd y og hæð z . Hver er lengd striks frá horni í gagnstætt horn?



☒ $\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$
☐ $\sqrt{\sqrt{x^2 + y^2} + z^2}$
☐ $\sqrt{x^2 + y^2} + z^2$
☐ $\sqrt{x^2 + y^2} + z$

Skýring. Samkvæmt Pýþagórasarreglu er hornalínan í botninum á kassanum $\sqrt{x^2 + y^2}$ að lengd. Þá má beita Pýþagórasarreglu aftur á lengdirnar z og $\sqrt{x^2 + y^2}$ til að fá að lengdin sé

$$\sqrt{\left(\sqrt{x^2 + y^2}\right)^2 + z^2} = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

9. Hver af eftirfarandi stærðum endar ekki á tölustafnum 0?

☐ $7!$
☐ $17^7 - 7^7$
☒ $17^7 + 7^7$
☐ $11^7 - 1$

Skýring. $7!$ inniheldur 2 og 5 í margfeldinu, svo það endar á 0.

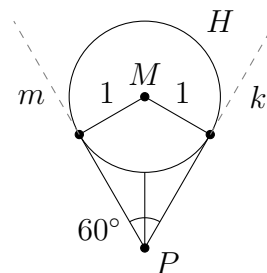
Nú er $17^7 = (10 + 7)^7$. Með því að margfalda upp úr svigunum þá sjáum við að allir liðirnir nema liðurnir 7^7 eru margfeldi af 10. Þetta sýnir að 17^7 og 7^7 enda á sama tölustafnum. Sér í lagi þá endar $17^7 - 7^7$ á 0.

Með sama hætti sést að $11^7 - 1 = 11^7 - 1^7$ endar á 0.

Nú endar $7^2 = 49$ á 9 svo $7^4 = (7^2)^2$ endar á sama tölustaf og $9^2 = 81$, það er 1. Af þessu sést að $7^7 = 7^4 \cdot 7^3$ endar á sama tölustaf og 7^3 . Þar sem $7^3 = 7 \cdot 7^2$ þá endar 7^3 á sama tölustaf og $7 \cdot 9 = 63$, það er 3. Þetta sýnir að 7^7 endar á 3. Því fæsta að $17^7 + 7^7$ endar á sama tölustaf og $3 + 3 = 6$ en það er ekki 0.

10. Hringur H hefur geisla (radíus) 1 og miðju M . Snertlar við hringinn, m og k , skerast í punkti P utan við hringinn. Hornið milli snertlanna er 60° . Hver er stysta fjarlægð P frá hringnum?

☐ $2\sqrt{2} - 2$
☐ $2/\sqrt{3}$
☐ $\pi/3$
☒ 1



Skýring. Snertlar snerta hring í réttu horni. Myndin er samhverf um línuna frá punktinum að miðju hrings svo hornið milli snertils og línunnar að miðju hrings er 30° gráður. Þríhyrningurinn sem M , P og annar snertipunktanna myndar er því með 30° , 60° og 90° horn. Af þessu sés að langhliðin PM er tvöfalt lengri en skammhliðin á móti P en hún hefur lengd 1. Þetta sýnir að MP hefur lengd 2, það er P er í fjarlægð 2 frá miðju hringsins. Þar sem hringurinn hefur geisla af lengd 1 þá er fjarlægð P frá hringnum $2 - 1 = 1$.

Annar hluti

- 11.** Til er nákvæmlega ein þriggja stafa tala sem verður 4.5 sinnum stærri þegar fyrsta og þriðja tölustaf er svissað. Hver er sú tala?

Svar: 198

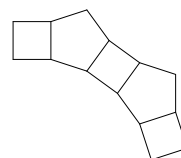
Skýring. Ef talan er $4.5 = 9/2$ sinnum stærri verður smærri talan að vera slétt og sú stærri margfeldi af 9. Tala er deilanleg með 9 þá og því aðeins að þversumma hennar sé margfeldi af 9. En þversumman breytist ekki við að svissa á tölustöfum, svo minni talan er margfeldi af 2 og 9. Því er hún margfeldi af 18. Hún þarf að hafa 3 tölustafi svo hún er ≥ 100 . En smærri talan sinnum 4.5 þarf að hafa 3 tölustafi svo hún er mest $999/4.5 = 222$. Því þarf bara að prófa tölurnar 108, 126, 144, 162, 180, 198 og 216. Það sést að eina lausnin sé 198.

- 12.** Hvert er gildi $\sqrt{42 + \sqrt{42 + \sqrt{42 + \sqrt{42 + \dots}}}}$?

Svar: 7

Skýring. Sjáum að ef x er svarið er $x = \sqrt{42 + x}$ sem gefur $x^2 - x = 42$. Leysa má þessa jöfnu til að fá $x = 7$.

- 13.** Ferningum og reglulegum fimmhyrningum er raðað saman í hring eins og búturinn hér til hliðar sýnir. Hvað þarf marga ferninga og fimmhyrninga samtals til að fara hringinn?

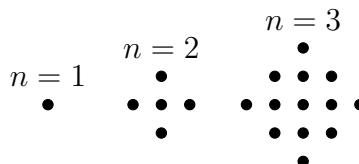


Svar: 20

Skýring. Hornasumma n -hyrnings er $(n - 2) \cdot 180^\circ$ því skipta má honum í $n - 2$ þríhyrninga með 180° hornasummu hver. Því er hvert innra horn reglulegs n -hyrnings $(n - 2)/n \cdot 180^\circ$. Svo ferningarnir hafa 90° horn og fimmhyrningarnir 108° horn. Því

mætast hyrningarnir við 198° horn, svo hlið hvers hyrnings er 18° frá þeim á undan. Það þarf því $360^\circ/18^\circ = 20$ hyrninga til að fara hringinn.

14. Á myndinni sést mynstur punkta fyrir $n = 1, 2, 3$. Hvað verða margir punktar í mynstrinu fyrir $n = 50$?



Svar: 4901

Skýring. Táknnum fjölda punkta á miðjúlínu og fyrir ofan í myndinni fyrir n með $f(n)$. Þá er svarið $f(50) + f(49)$. Færa má hægri helming punktanna yfir til að mynda ferning til að sjá að $f(n) = n^2$, það má einnig fá það útfrá summu oddatalna. Þar með er svarið $50^2 + 49^2 = 4901$.

15. Finnið stærstu töluna x svo að 2^x deili $(2^{2^{2^2}} + 2)!$.

Svar: 65536

Skýring. Lát $y = 2^{2^{2^2}} + 2 = 65538$. Svarið er fjöldi skipta sem 2 gengur upp í hverja tölu $\leq y$ lagt saman. Þetta er jafnt $y/2 + y/4 + y/8 + \dots$ þar sem er rúnnað niður í hverri deilingu. Sjáum að $y = 2^{16} + 2$ svo liðirnir verða $2^{15} + 1, 2^{14}, 2^{13}$ og niður í 2^0 . Útfrá reglu um summu veldaraða fæst að $2^0 + 2^1 + \dots + 2^{15} = 2^{16} - 1$. Svarið er því einum hærri en þetta sem er $2^{16} = 65536$.

Þriðji hluti

Dæmi 16

Ef tölunni 2025 er skipt í tvær tveggja stafa tölur fást 20 og 25. Samanlagt gefa þær 45, og $45^2 = 2025$. Næsta tala sem þetta gildir um er 3025. Hvaða fjögurra stafa tala með þennan eiginleika kemur næst?

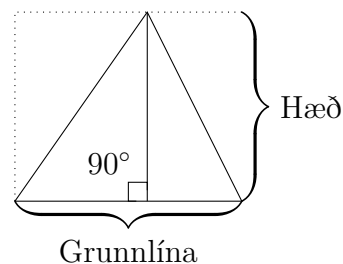
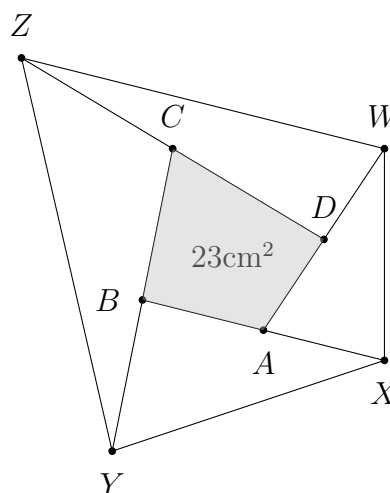
Lausn

Svarið er fjögurra stafa tala, svo köllum helmingana a, b . Þá er $(a + b)^2 = 100a + b$ sem má umrita sem $(a + b - 50)^2 = 2500 - 99b$. Getum skilgreint $x = a + b - 50$, þá er $-50 \leq x \leq 50$ þar sem $b \geq 0$. Nú er jafnan þá $99b = (50 - x)(50 + x)$, svo 11 deilir $50 - x$ eða $50 + x$. Þetta gefur lausnir $x = 6, 17, 28, 39, 50$ og $x = 5, 16, 27, 38, 49$. Sama gildir um 9 þar sem 3 getur ekki deilt báðum stærðunum, einu lausnirnar sem uppfylla þetta eru $x = 5, 49, 50$. Að stinga inn $x = 50$ gefur engar lausnir með $10 \leq a \leq 99$. Að stinga in $x = 5$ gefur $b = 25$ og $a = 20, 30$ sem eru gefnu lausnirnar. Loks að

stinga inn $x = 49$ gefur $b = 1$ og $a = 98$ sem samsvarar lausninni 9801. $\square$

Dæmi 17

Gefinn er ferhliðungur $ABCD$ með flatarmál 23cm^2 . Hliðar hans eru gerðar tvöfalt lengri, eins og sést á mynd. Þetta gefur okkur fjóra nýja punkta X, Y, Z, W . Hvert er flatarmál ferhliðungsins $XYZW$? Athugið að flatarmál þríhyrnings má reikna sem grunnlínu sinnum hæð deilt með tveimur, sjá mynd að neðan.



Lausn

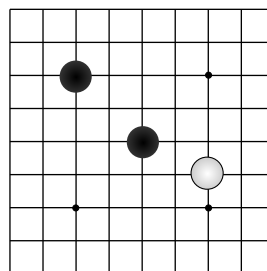
Svarið er 115cm^2 .

Skoðum þríhyrninginn ABC . BC er jafn langt og BY , svo BXY hefur sömu grunnlínu. Hins vegar er hæð BXY tvöfalt hærri, svo flatarmál BXY er tvöfalt flatarmál ABC . Eins fæst að flatarmál ZWD er tvöfalt flatarmál ACD . Saman þekja ABC og ACD gráa svæðið, og eru því samtals með flatarmál 23cm^2 . Því eru ZWD og BXY samtals með flatarmál 46cm^2 .

Beita má sömu rökum til að fá að ZCY og WAX hafi einnig samtals flatarmál 46cm^2 . Því er samtals flatarmál $XYZW$ gefið með $46\text{cm}^2 + 46\text{cm}^2 + 23\text{cm}^2 = 115\text{cm}^2$. $\square$

Dæmi 18

Jörmunrekur á stórt $n \times n$ Go leikborð og nóg af svörtum og hvítum steinum til að leggja á það. Hann vill leggja $n \times n$ steina á borðið svo sérhver steinn hafi nákvæmlega 2 granna af sínum eigin lit. Hér teljast steinar grannar ef þeir liggja hlið við hlið (lóðrétt eða lárétt) með ekkert gat sín á milli. Fyrir hvaða n er þetta hægt? (Myndin er af 9×9 borði).



Lausn

Fyrir slétt n byrjum við að þekja 4 miðjureiti í einum lit, alla reiti sem eru aðlægir þeim (einnig á ská) í hinum litnum, endurtökum þar til borðið er fullt. Sjáum að þetta gefur gilda röðun fyrir öll slétt n .

Sýnum að odda borð séu ekki möguleg. Byrjum á einhverjum stein og förum í annan hvorn granna hans sem er af sama lit. Höldum áfram og gerum þetta áfram og förum alltaf í grannann sem við vorum að koma úr. Á endanum förum við á sama stað og við byrjuðum á, svo við setjum þessa steina sama í hóp. Þar sem summa x og y hnits okkar skiptir um áferð í hverju skrefi tókum við sléttan fjölda skrefa. Endurtökum þetta ef það eru steinar eftir utan hóps þar til allir steinar eru búnir. Fáum þá að fjöldi steina sé sléttur. Því gengur þetta ekki ef borðið er odda, því þá er odda fjöldi reita. $\square$

Dæmi 19

Höfum runu talna $a_1, a_2, a_3, \dots$

Gefið er að

$$a_{2n} = a_n, \quad a_{4n-3} = 2a_{2n-1} - 1, \quad \text{og} \quad a_{4n-1} = 2a_{2n-1} + 1$$

fyrir öll $n = 1, 2, \dots$. Reiknið gildi $a_1 + a_2 + \dots + a_{2025}$.

Hlutstig fást fyrir að ákvarða rununa $a_1, a_2, a_3, \dots$

Lausn

Sjáum að a_n er stærsti odda deilir n . Sýnum það með þrepun. Setjum $n = 1$ í a_{4n-3} til að fá $a_1 = 2a_1 - 1$ svo $a_1 = 1$ sem gefur okkur grunntilfellið. Næst fáum við að $a_n = a_{2n}$ því að tvöfalda tölu breytir ekki odda deilum. Loks fæst að fyrir odda tölur er stærsti odda deilir talan sjálf, svo $a_{4n-3} = 2a_{2n-1} - 1 = 2(2n - 1) - 1 = 4n - 3$ og $a_{4n-1} = 2a_{2n-1} + 1 = 2(2n - 1) + 1 = 4n - 1$ samkvæmt þrepunarforsendu. Þar með fæst niðurstaða með þrepun.

Látum $b_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n$ og látum $2s$ vera stærstu sléttu töluna sem er ekki stærri en n og $2t - 1$ vera stærstu oddatöluna sem er ekki stærri en n . Við getum

reikað $s = \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$ og $t = \left\lfloor \frac{n+1}{2} \right\rfloor$. Athugum að

$$\begin{aligned} b_n &= (a_1 + a_3 + \cdots + a_{2t-1}) + (a_2 + a_4 + \cdots + a_{2s+1}) \\ &= (1 + 3 + \cdots + (2t-1)) + (a_1 + a_2 + \cdots + a_s) \\ &= t^2 + b_s \end{aligned}$$

Með þessar rakning fæst að:

$$\begin{aligned} b_{2025} &= 1013^2 + b_{1012} \\ &= 1013^2 + 506^2 + b_{506} \\ &\vdots \\ &= 1013^2 + 506^2 + 253^2 + 127^2 + 63^2 + 32^2 + 16^2 + 8^2 + 4^2 + 2^2 + 1^2 \\ &= 1367677 \end{aligned}$$

Þetta sýnir að $a_1 + a_2 + \cdots + a_{2025} = 1367677$

□