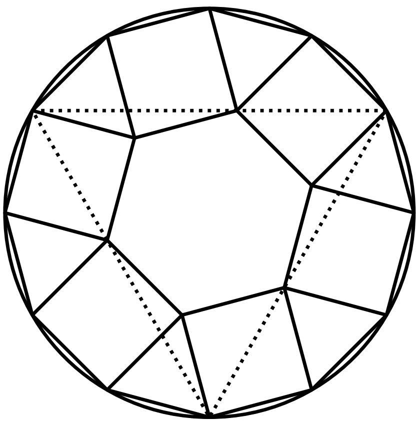
Íslenska stærðfræðafélagið
Félag raungreinakennara í framhaldsskólum

Stærðfræðikeppni framhaldsskólanema 2025–2026

Úrslitakeppni

Svör og lausnir



Dæmi 1
Við köllum tölu samhverfa ef hún er eins þegar hún er lesin afturábak í tugakerfi. Til dæmis er 13531 samhverf en 12322 er það ekki. Gefið er að x sé fjögurra stafa samhverf tala og að $x + 852$ er fimm stafa samhverf tala. Hvað er x?

Lausn
Þar sem $x < 10000$ er $x+852 < 11000$ svo fremstu tveir stafir $x+852$ eru einn og núll. Þar með eru það öftustu tveir stafirnir spegilmynd þeirra, 01. Með því að draga 52 frá beggja vegna sjáum við að öftustu tveir tölustafir x séu 49. En x er samhverf svo þá er $x = 9449$. Þetta gengur upp því $x + 852 = 10301$. $\square$

Dæmi 2
Þú byrjar með (endanlegan) lista L af tölum. Við skiptum þessum lista L út fyrir nýjan lista sem gefur til kynna hversu oft hver tala kom fyrir í L. Til dæmis ef tala kemur þrisvar fyrir í L mun nýji listinn innihalda þrist sem samsvarar þeim tölum. Til dæmis ef $L = [7, 1, 1, 1, 4, 5, 4]$ er nýji listinn $[1, 1, 2, 3]$. Svo skiptum við út nýja listanum fyrir enn annan lista með sama hætti, og svo framvegis. Sannið að á endanum verði listinn einfaldlega eitt eintak af tölunni 1.

Lausn
Ef einhver tala er tvítekin í L verður nýji listinn styttri. Listinn getur bara styst endanlega oft svo að lokum verður listinn ekki með neinar endurteknar tölur. En þá er næsti listi bara með ása, svo listinn þar á eftir er bara ein tala k. Þar næst er þá listinn einn ás, sem breytist ekki við aðgerðina. $\square$

Dæmi 3
Gísli hefur unun af heita pottinum í sveitinni sinni. Þar eru þrír kranar í litunum rauður, grænnn og blár. Rennsli og hitastig hvers krana er fast.

1. Ef skrúfað er frá rauða og græna krananum tekur 70 mín að fylla pottinn af $41\ ^\circ$C vatni.
2. Ef skrúfað er frá rauða og bláa krananum tekur 42 mín að fylla pottinn af $35\ ^\circ$C vatni.
3. Ef skrúfað er frá græna og bláa krananum tekur 35 mín að fylla pottinn af $39\ ^\circ$C vatni.

Hvað væri hitastig pottsins í gráðum ef hann skrúfar frá öllum krönunum samtímis? (***Ath**: Ef einum lítra af $20\ ^\circ$C vatni er blandað við tvo lítra af $29\ ^\circ$C vatni þá fást þrír lítrar af $26\ ^\circ$C vatni.*)

Lausn
Látum r, g og b standa fyrir hve stóran hluta pottsins rauði, græni og blái kraninn fylla á hverri sekúndu. Látum svo x, y og z vera hitastig vatnsins í krönunum, í sömu röð. Við höfum að

$$r + g = \frac{1}{70}, \quad r + b = \frac{1}{42} \quad \text{og} \quad g + b = \frac{1}{35}$$

en einnig að

$$\frac{rx + gy}{r + g} = 41\ ^\circ\text{C}, \quad \frac{rx + bz}{r + b} = 35\ ^\circ\text{C} \quad \text{og} \quad \frac{gy + bz}{g + b} = 39\ ^\circ\text{C}.$$

Af þessu sést að

$$\begin{aligned} r + g + b &= \frac{1}{2}((r + g) + (r + b) + (g + b)) \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{70} + \frac{1}{42} + \frac{1}{35}\right) = \frac{1}{30}. \end{aligned}$$

Einnig fæst

$$rx + gy = \frac{41}{70}\ ^\circ\text{C}, \quad rx + bz = \frac{35}{42}\ ^\circ\text{C} \quad \text{og} \quad gy + bz = \frac{39}{35}\ ^\circ\text{C}.$$

Hitastig vatnsins sem kemur þegar skrúfað er frá öllum krönunum er því

$$\begin{aligned}\frac{rx+gy+bz}{r+g+b} &= \frac{\frac{1}{2}\left((rx+gy)+(rx+bz)+(gy+bz)\right)}{r+g+b}\\ &= \frac{\frac{41}{70}\ ^\circ\text{C}+\frac{35}{42}\ ^\circ\text{C}+\frac{39}{35}\ ^\circ\text{C}}{2/30} = 38\ ^\circ\text{C}.\end{aligned}$$

$\square$

Dæmi 4
Rétthyrndur þríhyrningur með jákvæðar heiltöluhliðarlengdir hefur ummál 1000. Hverjar eru mögulegu hliðarlengdir hans?

Lausn
Köllum hliðarlengdir hans a, b, c þar sem c er langhliðin. Þá er $a+b+c = 1000$ og Pýþagórasarsetning gefur $a^2+b^2=c^2$. Við getum stungið aðra jöfnuna inn í hina til að fá

$$a^2+b^2=(1000-a-b)^2=10^6-2000(a+b)+(a+b)^2$$

Getum umritað og svo þáttað

$$10^6=2\cdot 10^6-2000(a+b)+2ab=2(1000-a)(1000-b)$$

sem gefur að $(1000-a)(1000-b)=500000$. Þáttum hægri hliðina sem $2^5\cdot 5^6$. Þar sem $1000-a$ og $1000-b$ eru strangt minni en 1000 getur hvorugur þátturinn innihaldið 5^5, mest 5^4. Því eru báðir þættir deilanlegir með 25. Lát $a=25a'$ og $b=25b'$ og fáum

$$(40-a')(40-b')=800=5^2\cdot 2^5$$

Sjáum nú að annað hvort er annar þátturinn vinstra megin 25 eða þeir eru báðir deilanlegir með 5. Ef þeir eru báðir deilanlegir með 5 getur hvor þátturinn verið mest deilanlegur með 2 tvisvar, því þeir eru < 40. En við þurfum að dreifa fimm tvistum, svo það gengur ekki. Því er annar þátturinn 25, og hinn verður þá að vera 32. Þar með er $\{a', b'\}=\{8, 15\}$. Fáum því að einu mögulegu hliðarlengdirnar eru $200, 375$ og 425. $\square$

Dæmi 5

Magnea, Mía og Friðfinnur sitja í hring. Það er búið að tússa jákvæða heiltölu á enni allra þeirra, svo þau sjá öll tölur hinna tveggja en ekki eigin tölu. Þeim er sagt að summa tveggja talnanna er jöfn þeirri þriðju. Magnea er spurð hver tala sín er, en svarar að hún viti ekki. Mía er spurð hver tala sín er, en svarar að hún viti ekki. Friðfinnur er spurður hver tala hans er, en svarar að hann viti ekki. Loks er Magnea spurð aftur og segir að tala sín er 65. Hverjar eru tölurnar á ennum þeirra?

Lausn

Táknum tölur Magneu, Míu og Friðfinns með x, y, z og lausn með þrendinni (x, y, z). Hver einstaklingur sér tvær tölur a, b og veit þar með að eigin tala er annað hvort $a + b$ eða $|a - b|$.

Ef $y = z$ myndi Magnea vita að eigin tala er ekki $|y - z|$ því þær eru allar jákvæðar, svo hún myndi vita að eigin tala er $y + z$. En þar sem hún vissi ekki, þá er $y \neq z$. Lausnin er sem sagt ekki á forminu $(2\alpha, \alpha, \alpha)$ fyrir eitthvað α.

Nú veit Mía þetta, svo ef lausnin væri á forminu $(2\alpha, 3\alpha, \alpha)$ myndi hún vita það, þar sem hinn valkosturinn er þegar útilokaður. Einnig fæst á sama hátt og fyrir Magneu að svar gefi að lausnin sé ekki á forminu $(\alpha, 2\alpha, \alpha)$.

Ef við endurtökum hliðstæða röksemdafærslu fyrir öll tilfelli þegar Friðfinnur svarar þá sést að svarið er ekki á forminu $(\alpha, \alpha, 2\alpha)$, ekki á forminu $(\alpha, 2\alpha, 3\alpha)$ og loks ekki heldur á forminu $(2\alpha, 3\alpha, 5\alpha)$.

Við þurfum að endurtaka þetta einu sinni enn, en í þetta sinn vitum við að svarið er á einu af formunum sem við fáum, þar sem að Magnea svarar að hún viti. Þar með er svarið á einu af formunum $(2\alpha, \alpha, \alpha)$, $(3\alpha, \alpha, 2\alpha)$, $(5\alpha, 2\alpha, 3\alpha)$ eða $(8\alpha, 3\alpha, 5\alpha)$.

Við vitum að α er heiltala, en að $x = 65$. Þar sem $2, 3$ og 8 deila ekki 65 kemur bara lausnin $(5\alpha, 2\alpha, 3\alpha)$ til greina. Þá er $\alpha = 13$ svo lausnin er $(65, 26, 39)$.

$\square$

Dæmi 6
Lát p vera frumtölu og S vera mengi heiltana frá 0 til $p-1$. Við skiptum menginu S endurtekið út fyrir mengið

$$\{x \cdot x \pmod p | x \in S\}$$

þar til S hættir að breytast. Í lok þessa ferlis, hver er stærð S?

Lausn
Lausn 1:
Við sjáum að fyrir gildi x, y þannig að $x = -y \pmod p$ þá mun $x^2 = y^2 \pmod p$. Því svo lengi sem til er $x \in S$ þannig að $-x \pmod p S$ og $x \neq -x \pmod p$ mun S minnka í næsta skrefi og við erum ekki búin. Sjáum að 0 verður til alltaf í menginu, svo við setjum það til hliðar. Þá höfum við $p-1$ gildi, og fyrri helmingurinn varpast í hinn undir $N(x) = -x \pmod p$. // TODO

Lausn 2:
Lát g vera frumstæða rót með tilliti til p. Getum þá ritað $S = \{0\} \cup \{g^0, g^1, \ldots, g^{p-1}\}$. Eftir því sem við hefjum í annað veldi aftur og aftur verður 0 alltaf 0, en hin gildin verða á forminu $g^{2^k i}$. Vísirinn $2^k i$ verður mátaður við $p-1$. Lát s vera odda hluti $p-1$ og ritum $p-1 = 2^r s$. Sjáum að vísarnir $2^k i$ verða á endanum margfeldi af 2^r, svo við getum skoðað vísana mátaða við s í staðinn. En þar er margföldun með tveimur gagntæk, svo við endum með s vísa. Þar með endum við með $s+1$ stök, þegar við bætum 0 aftur við. $\square$

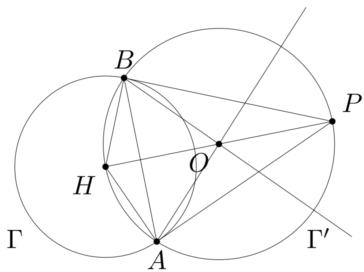
Dæmi 7
Látum Γ vera hring, og P vera einhvern punkt utan hringsins. Látum snertlana tvo við hringinn Γ gegnum punktinn P snerta Γ í punktum A og B. Sýnið að miðja innritaðs hrings í ABP liggi á hringnum Γ.

Lausn
Táknum miðju innritaða hrings ΔABP með O og táknum miðju Γ með H. Þar sem A og B eru snertipunktar fæst að $\angle PAH$ og $\angle PBH$ eru rétt horn. Nú eru þríhyrningarnir ΔPAH og ΔPBH rétthyrndir og með tvær sameiginlegar hliðar þar sem AH og BH eru bæði radíus Γ. Þeir eru því einslaga, svo $\angle APH = \angle BPH$. Því er PH helmingunarlína hornsins við P, svo O er á PH. Því dugar nú að sýna að lengd OH sé radíus Γ.

Látum Γ' vera umhring ΔAPH. Setning Þalesar gefur þá að PH sé þvermál þess umhrings. Sama fæst um umhring ΔBPH, svo þeir eru eins. Því eru A, B, P, H á sama hring. Nú eru $\angle HOA$ og $\angle AOP$ frændhorn svo $\angle HOA = 180° - \angle AOP$. Getum stungið inn að hornasumm ΔOPA sé $180°$ til að fá næst að

$$\angle HOA = 180° - (180° - \angle PAO - \angle OPA) = \angle PAO + \angle OPA$$

Innmiðjur liggja á helmingarlínum hornanna, svo $\angle PAO = \angle OAB$ og $\angle OPA = \angle HPB$. Loks sjáum við að $\angle HPB = \angle HAB$ því þau spanna sama boga í Γ'. Þar með er $\angle HOA = \angle OAB + \angle HAB = \angle OAH$. Því er ΔHOA jafnarma, svo $|HA| = |HO|$ sem lýkur sönnun.



$\square$

Dæmi 8
Ósvífinn hakkari er að fela sig í einum af 2^N vefþjónum, sem hver er tilgreindur með N bitum. Til dæmis ef $N = 5$ er einn vefþjónninn gefinn með nafninu 01101.

Til að góma hann tengjast K lögreglumenn við K vefþjóna. Svo skiptast hakkarinn og lögreglumenn á að hreyfast. Þeir geta annað hvort staðið í stað eða fært sig á vefþjón sem hefur einn bita öðruvísi. Til dæmis má fara úr 01101 í 11101. Hvað K að vera að lágmarki til að einhver lögreglumaður nái að vera á sama vefþjón og hakkarinn eftir endanlega langan tíma sama hvar hakkarinn og lögreglumennirnir byrja? Gerum ráð fyrir að allir beiti bestu mögulegu strategíu. Allir vita ávallt hvar allir aðrir eru.

Lausn
Sýnum að svarið sé $K = \lceil \frac{N+1}{2} \rceil$. Fyrst sönnum við að $K = \lceil \frac{N+1}{2} \rceil$ dugi til að góma hakkarann og beitum til þess þrepun. Skoðum fyrst grunntilfellin $N = 1, 2$. Tilfellið $N = 1$ er ljóst því þá dugar $K = 1$, annað hvort er lögreglumaðurinn á réttum stað þegar hann á að gera eða hann getur farið á hinn staðinn sem er þá réttur til að góma hakkarann. Ef $N = 2$ eru 4 vefþjónar sem mynda rás, svo lögreglumennirnir staðsetja sig einfaldlega á fyrsta og þriðja vefþjón í rásinni og geta gómað hakkarann í næsta skrefi.

Tökum þá fyrir þrepunarskrefið með $N \geq 3$. Köllum vefþjóninn sem er með sömu bitarunu og hakkarann nema við setjum 0 í fyrstu tvö sætin *ofanvarp* hakkarans. Byrjum á að færa alla lögreglumenn í vefþjóna sem byrja á 00. Samkvæmt þrepunarforsendu geta þá $K-1$ lögreglumenn gómað ofanvarp hakkarans, svo við getum gert ráð fyrir að einn lögreglumaður ℓ sé eins og hakkarinn í öllum hnitum nema fyrstu tveimur. Látum svo ℓ einfaldlega elta hakkarann með því að hreyfa sig alltaf í sömu átt svo hann ef hann færir sig ekki í fyrstu tveimur hnitunum. Því helst ℓ ávallt á ofanvarpinu. Ef hakkarinn er aðlægur þegar ℓ á að gera færir hann sig að hakkaranum og gómar hann. Því fæst að frá og með núna verður hakkarinn ávallt að halda sig í hnitum sem eru ólík hnitum ℓ í báðum fyrstu sætunum, það er að segja sem byrja á 11. Færum þá hina $K-1$ lögreglumennina í vefþjóna sem byrja á 11. Nú samkvæmt þrepunarforsendu geta þessir $K-1$ lögreglumenn gómað hakkarann.

Þá vantar nú bara að sýna að $K = \lceil \frac{N+1}{2} \rceil - 1 = \lceil \frac{N-1}{2} \rceil$ dugi ekki. Þurfum bara að skoða $N \geq 2$ því annars er $K \leq 0$. Fjöldi hnúta er 2^N en fjöldi reita sem lögreglumenn eru á eða geta farið á í fyrsta leik er í mesta lagi $K(N+1)$, svo lög því $K(N+1) < 2^N$. Þetta má reikna í höndunum fyrir lítil N og fyrir stærri N vex $(N+1)^2$ um minna en tvöfalt við að hækka N um 1.

Gefum því nú strategíu fyrir hakkarann til að vera aldrei gómaður, því til er uppröðun á hakkara og lögreglumönnum þar sem hann er ekki gómaður áður en hann fær að gera. Ef enginn lögreglumaður er í fjarlægð 1 frá honum gerir hakkarinn ekki neitt, og verður þá ekki gómaður áður en hann fær annan leik. Annars getum við gert ráð fyrir að einn lögreglumaður sé aðlægur hakkaranum. Látum L vera mengi allra lögreglumanna í fjarlægð 1 eða 2 frá hakkaranum. Hver lögreglumaður í L getur aðeins verið frábrugðinn hakkaranum í tveimur bitum, og einn þeirra í aðeins einu. Því geta þeir saman verið ólíkir í

$$2(K-1)+1 = 2\left(\left\lceil \frac{N-1}{2} \right\rceil - 1\right) + 1 \leq 2\left(\frac{N-1}{2} - 1\right) + 1 \leq N-1$$

bitum, svo til er sæti i þannig að hakkarinn og allir lögreglumenn eru eins í bita númer i. Þá getur hakkarinn fært sig í vefþjóninn sem er öðruvísi í sæti i. Þá er hann í fjarlægð að minnsta kosti 2 frá öllum utan L því þeir voru í fjarlægð ≥ 3 og hann færði sig um eitt skref. En allir í L voru að minnsta kosti einu skrefi frá og eru nú að minnsta kosti einu skrefi til viðbótar fjær. Því getur enginn lögreglumaður náð hakkaranum áður en hann fær annan leik. Þar með næst hakkarinn aldrei.

ATH: Sýna má að það sama gildir um öll net sem eru karteskt margfeldi N trjáa, ekki bara Q_N. $\square$