

Liðakeppni - Efra stig

9. október 2021

Engar reiknivélar leyfilegar

Algebra

1. Er talan $\left(1 + \frac{1}{2}\right) \left(1 + \frac{1}{3}\right) \left(1 + \frac{1}{4}\right) \cdots \left(1 + \frac{1}{2021}\right)$ heil tala? Sannið eða afsannið.
2. Þrjár af rótum margliðunnar $P(x) = x^4 + ax^2 + bx + c$ eru 1, 2 og 3. Finnið c .
3. Um rauntölurnar a, b, c og m gildir að $a + b = 2m^2$, $b + c = 6m$ og $a + c = 2$. Fyrir hvaða gildi á m er $a \leq b \leq c$?
4. Látum p, q, r og s vera jákvæðar rauntölur. Sýnið að brotið

$$\frac{(p^2 + p + 1)(q^2 + q + 1)(r^2 + r + 1)(s^2 + s + 1)}{pqrs}$$

geti ekki verið minna en 81.

5. Leysið jöfnuna $(x^2 + x + 1)(x^6 + x^3 + 1) = \frac{511}{x - 1}$.

Fléttufræði/talningarfræði

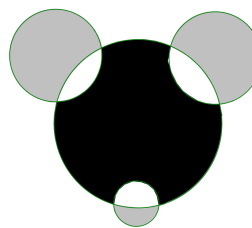
6. Í boði rektors heilsar hver gestur nákvæmlega einu sinni hverjum hinna gestanna með handabandi. Það eru 36 handabönd milli tveggja kvenna og 28 á milli tveggja karla. Hver er fjöldi handabanda á milli kvenna og karla?
7. Pókerhönd samanstendur af 5 spilum úr venjulegum spilastokk. *Flush* er hönd þar sem öll spilin eru af sömu sort, ♠, ♣, ♡, ♢. *Straight* er hönd þar sem öll spilin eru í röð, t.d. Gosi, tíá, nía, átta, sjöa, óháð sort. Hér má ásinn bæði vera hæsta og lægsta spilið. Hvað eru margar pókerhendur sem eru annaðhvort flush eða straight?

Ath: Ekki þarf að reikna upp úr tölunni til þess að fá nákvæmt gildi.

8. Hornpunktar tenings eru tölusettir með tölunum frá 1 upp í 8 (hver tala notuð einu sinni). Fyrir hverja brún er mynduð summa talnanna á endapunktum hennar. Er hægt að tölusetja hornpunktana á þann veg að summurnar fyrir brúnirnar séu ólíkar?
9. Meðal 25 hesta viljum við finna þrjá þá fljótustu. Við höfum enga klukku en hlaupabraut þar sem við getum látið fimm hesta hlaupa í einu og séð í hvaða röð þeir koma í mark. Gerum ráð fyrir að sérhver hestur hlaupi á föstum hraða og að allir séu þeir misfljótir. Sýnið að hægt er að finna þrjá fljótustu hestana og innbyrðis röð þeirra í sjö hlaupum.
10. Fimmtán steinar eru lagðir á 4×4 reita borð, einn á hvern reit og eftir verður einn auður reitur. Þegar tveir steinar liggja á grannreitum (með sameiginlega hlið) má annar þeirra stökkva yfir hinn sé reiturinn handan hans auður. Steinninn sem stökkið er yfir er fjarlægður af borðinu. Fyrir hvaða upphafsstöðu tóma reitsins er mögulegt að enda með nákvæmlega einn stein á borðinu?

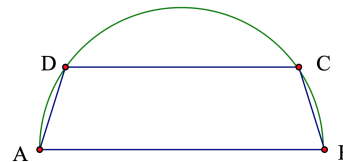
Rúmfræði

11. Hringur með geisla 6 sker hringi með geisla 4, 4 og 2 eins og á mynd. Ef gráa svæðið er 90 fermetrar, hvað er þá svarta svæðið stórt?



12. Punkturinn A liggur á línunni með jöfnu $y = 2x + 3$, B á línunni með jöfnu $y = x + 2$ og punkturinn $M = (3, 10)$ er miðpunktur striksins AB . Finnið jöfnu línunnar gegnum A og B .

13. Hringur með geisla 2 hefur AB sem miðstreng. Strikin AD og BC eru bæði 1 m að lengd. Hve langt er strikið DC ?



14. Í ferhyrningi $ABCD$ eru hornin $\angle ADC$ og $\angle BCD$ stærri en 90° , F er skurðpunktur línunnar AC og línu gegnum B samsíða AD og E er skurðpunktur línunnar BD og línu gegnum A samsíða BC . Sannið að EF er samsíða CD .

15. Punkturinn $A = (12; 0)$ er gefinn í hnitakerfi. Punkturinn C er einhversstaðar á línunni $x = 24$ og punktur B er einhversstaðar á línunni $x = y$. Ákvarðið hnit punktanna B og C þannig að ummál þríhyrningsins $\triangle ABC$ verði sem minnst.

Talnafræði

16. Hvað eru til margar jákvæðar heilar tölur n þannig að $2n + 1$ gangi upp í $8n + 169$?
17. Talan 49 í talnakerfi með grunntölunni p er sama talan og 94 með grunntölunni q . Hvert er minnsta mögulega gildið á $p + q$?
18. Finnið allar jákvæðar heiltölur m og n þannig að m gengur upp í $2n - 1$ og n gengur upp í $2m - 1$.

Við næstu tvö dæmi gagnast eftirfarandi:

Ef n er heiltala látum við $\tau(n)$ tákna fjölda náttúrulegra talna sem ganga upp í n .

- (a) Frumþáttum náttúrulega tölu n með $n = p_1^{a_1} p_2^{a_2} \cdots p_k^{a_k}$, þar sem $2 \leq p_1 < p_2 < \cdots < p_k$ eru frumtölur og a_1, a_2, \dots, a_k eru náttúrulegar. Þá er

$$\tau(n) = (a_1 + 1)(a_2 + 1) \cdots (a_k + 1)$$

- (b) Ef n og m eru ósambátta heiltölur (þ.e. engin tala önnur en 1 gengur upp í þær báðar) þá gildir

$$\tau(nm) = \tau(n)\tau(m).$$

19. Finnið allar jákvæðar heiltölur n þannig að talan 30 gangi upp í n og $\tau(n) = 30$.

20. Sýnið að um allar heiltölur n gildi:

- Talan n er ferningstala ef og aðeins ef $\tau(n)$ er oddatala.