

## Stærðfræðikeppni framhaldsskólanema 2017–2018 Efra stig

Nafn: \_\_\_\_\_

Kennitala: \_\_\_\_\_ Sími: \_\_\_\_\_

Heimilisfang: \_\_\_\_\_ Póstnúmer: \_\_\_\_\_

Netfang: \_\_\_\_\_

Skóli: \_\_\_\_\_ Bekkur eða áfangi: \_\_\_\_\_

Námsár í framhaldsskóla:  2.  3.  4.

I	
II	
16	
17	
18	
19	
Alls	

### Leiðbeiningar:

- Opnið ekki spurningaheftið fyrr en ykkur er sagt að gera það.
- Færið inn allar upplýsingar sem beðið er um hér á undan áður en þið opnið heftið.
- Þetta er ekki venjulegt próf. Ekki er gert ráð fyrir að margir geti svarað öllum spurningunum. Þótt þið getið ekki svarað nema hluta þeirra, þá þarf það ekki að þýða að þið standið ykkur ekki vel. Sumar spurninganna eru mjög erfiðar.
- Keppnin er í þremur hlutum. Í fyrsta hluta eru tíu spurningar sem gilda þrjú stig hver; í öðrum hluta eru fimm spurningar sem gilda sex stig hver og í þriðja hluta eru fjórar spurningar sem gilda tíu stig hver. Hámarksfjöldi stiga er 100.
- Allar spurningar í fyrsta hlutanum eru krossaspurningar. Á eftir hverri spurningu eru fjögur hugsanleg svör. Aðeins eitt þeirra er rétt. Setjið kross í reitinn framan við rétta svarið. **Ef þið getið ekki svarað spurningu, þá borgar sig yfirleitt ekki að giska á svarið, því að fyrir hvert rangt svar er dregið frá eitt stig.**
- Í öðrum hluta á aðeins að tilgreina svör, en ekki sýna aðferðina sem notuð var. Svarið skal tilgreint á svarlínunni aftan við spurninguna. Fyrir rétt svar eru gefin sex stig, fyrir rangt svar, ófullkomið eða tvírætt svar er ekkert stig gefið.
- Í lausnum fjögurra síðustu dæmanna, í þriðja hluta, á að gera fullkomna grein fyrir hvernig svarið var fengið. Færið inn endanlega lausn, ekki krot sem á heima á rissblöðum. Við mat lausna er tekið tillit til nákvæmni í röksemdafærslu og skýrleika í framsetningu.
- Hjálparmyndir sem fylgja sumum dæmunum eru aðeins ætlaðar til skýringar. Ekki er víst að þær séu teiknaðar í réttum hlutföllum.
- Þið hafið nákvæmlega tvær og hálf klukkustund til að leysa verkefnið eftir að ykkur er leyft að byrja. **Notkun reiknivéla er óheimil.**

## Fyrsti hluti

Í þessum hluta eru tíu spurningar. Hver spurning er þriggja stiga virði. Setjið kross framan við rétt svar. Fyrir rangt svar er dregið eitt stig frá.

1. Aðgerðirnar  $\clubsuit$  og  $\spadesuit$  eru skilgreindar svona:  $a\clubsuit b = a^2 - b^2$  og  $a\spadesuit b = 4ab$ . Hvert er þá gildið á  $5\spadesuit(3\clubsuit 2)$ ?

-551                       -100                       100                       200

2. Í þríhyrningi  $ABC$  er búið að teikna miðlínuna  $AM$ . Gefið er að  $AM = MB$  og  $\angle ABC = 40^\circ$ . Hversu stórt er þá hornið  $\angle ACB$ ?

$30^\circ$                         $40^\circ$                         $50^\circ$                         $80^\circ$

3. Thelma slær  $2^k$  inn í vasareikni. Hún ýtir síðan alls  $n$  sinnum á  $\sqrt{\quad}$  takkann eða þar til vasareiknirinn sýnir töluna 2. Hvert er gildið á  $k$ ?

$n$                         $2n$                         $2^n$                         $n^n$

4. Tölurnar 1, 5, 6, 7, 13, 14, 17, 22 og 26 eru ritaðar í hringi sem standa í röð. Gunnar reiknar út meðaltal talnanna í fyrstu þremur hringjunum, meðaltal talnanna í miðjuhringjunum þremur og meðaltal talnanna í síðustu þremur hringjunum. Þessi þrjú meðaltöl reynast vera jöfn. Ef tölunum 13 og 17 er komið fyrir eins og sést á myndinni, hvaða tala á þá að vera í skyggða hringnum?



1                       5                       7                       14

5. Látum  $M(n)$  og  $S(n)$  tákna margfeldi og summu tölustafa heiltölunnar  $n$ . Til dæmis er  $M(23) = 6$  og  $S(23) = 5$ . Hvaða tala er í einingarsæti tveggja stafa heiltölunnar  $k$  ef  $k = M(k) + S(k)$ ?

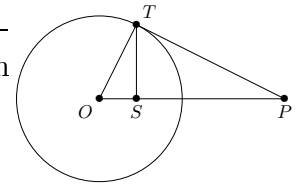
4                       6                       7                       9

6. Bolli byrjaði á hægri endanum og er búinn að trítla  $\frac{3}{4}$  af stönginni. Mæja maur byrjaði á vinstri endanum og er búin að trítla  $\frac{2}{3}$  af stönginni. Hversu stór hluti stangarinnar skilur á milli Bolla og Mæju?



- $\frac{3}{8}$ 
  $\frac{5}{7}$ 
  $\frac{1}{2}$ 
  $\frac{5}{12}$

7. Hringur hefur miðju  $O$ . Strikið  $PT$  liggur á snertli við hringinn í  $T$ . Strikið  $TS$  er hornrétt á  $OP$ . Hver er lengd  $TS$  í cm ef  $OS = 6$  cm og  $SP = 24$  cm?



- 12
  $12\sqrt{5}$ 
 15
  $6\sqrt{3}$

8. Sívalningslaga gosdós er gerð úr ferningslaga málmplötu og tveimur hringskífum sem báðar hafa þvermálið  $k$ . Hvert er rúmmál dósarinnar?

- $k^3\pi$ 
  $\frac{k^3\pi}{2}$ 
  $\frac{k^3\pi^2}{4}$ 
  $k^3\pi^2$

9. Símon ætlar að saga spýtu í níu jafnlanga búta. Hann mælir og merkir en hefur ekki tíma til að saga. Anna tekur spýtuna, sér ekki merkin hans Símonar og merkir til að saga í átta jafnlanga búta. Hún hefur ekki heldur tíma til að saga. Jónatan kemur og sagar spýtuna á öllum merktum stöðum. Hversu marga búta fær Jónatan?

- 15
 16
 17
 18

10. Um tvær rauntölur  $a$  og  $b$ , sem hvorug er núll, gildir að  $ab = a - b$ . Hvert er gildi stærðarinnar  $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} - ab$ ?

- 2
  $-\frac{1}{2}$ 
  $\frac{1}{2}$ 
 2

## Annar hluti

Í þessum hluta eru fimm dæmi og er hvert dæmi sex stiga virði. Tilgreinið svar ykkar á svarlínunni. Ekki þarf að skýra hvernig svarið er fengið. Fyrir rangt svar, ófullkomið svar eða tvírætt svar fæst ekkert stig.

11. Hver er fjöldi heiltalna  $n$  þannig að  $\frac{1}{7} \leq \frac{6}{n} \leq \frac{1}{4}$ .

Svar: \_\_\_\_\_

12. Fimm línur, sem allar liggja samsíða einni hlið þríhyrnings, skipta hinum tveimur hliðum þríhyrningsins upp í 6 jafnstór bil og þríhyrningnum sjálfum í 6 svæði. Hvert er flatarmál þríhyrningsins ef flatarmál stærsta svæðisins er 33 flatareiningar?

Svar: \_\_\_\_\_

13. Talnarunan  $2, 3, 6, 8, 8, \dots$  er útbúin með því að skrá fyrst 2 og 3 og síðan einingartölu margfeldis talnanna tveggja á undan. Hver er tala númer 2017 í þessari talnarunu?

Svar: \_\_\_\_\_

14. Hversu stór hluti borðdúksins á myndinni er svartur?



Svar: \_\_\_\_\_

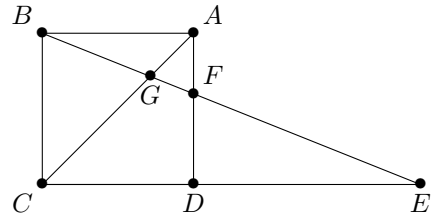
15. Hversu mörg pör heiltalna  $(x, y)$  uppfylla jöfnuna  $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{4}$ ?

Svar: \_\_\_\_\_

## Þriðji hluti

Í þessum hluta eru fjögur dæmi og er hvert dæmi tíu stiga virði. Hér ber að rökstyðja svörin. Við mat lausna er tekið tillit til frágangs, nákvæmni og skýrleika í framsetningu. Athugið að hægt er að fá stig fyrir að leysa dæmið að hluta eða koma fram með hugmynd sem er mikilvægt skref að lausn.

16. Ferningur  $ABCD$  er þannig að hornpunkturinn  $D$  liggur á strikinu  $CE$ , strikið  $BE$  sker strikið  $AC$  í punktinum  $G$  og strikið  $AD$  í punktinum  $F$ . Hver er lengd striksins  $EF$  ef vitað er að  $BG = 3$  m og  $GF = 1$  m?



Myndin er **ekki** í réttum hlutföllum

17. Ferningstala er tala sem er annað veldi heillar tölu. Töluna  $a$  má rita sem summu tveggja ólíkra ferningstalna. Sýnið að þá megi einnig rita töluna  $2a$  sem summu tveggja ólíkra ferningstalna.

18. Finnið allar margliður  $P(x)$  með heiltölustuðla sem eru ekki neikvæðir þannig að  $P(2) = 20$  og  $P(3) = 30$ .

- 19.** Rauðhetta á heima í punkti  $(0, 0)$  í venjulegu hnitakerfi. Hún ætlar að fara til ömmu sinnar sem býr í punktinum  $(4, 4)$ . Rauðhetta getur í hverju skrefi farið annað hvort upp í næsta heiltöluhnit eða til hægri í næsta heiltöluhnit. Stóri vondi úlfurinn vill verða á vegi Rauðhettu. Hann má velja sér hvaða punkt með heiltöluhnit sem er á milli heimilis Rauðhettu og heimilis ömmunnar. Hvar á úlfurinn að bíða þannig að hann verði á vegi Rauðhettu á sem flestum af leiðunum sem hún getur valið?