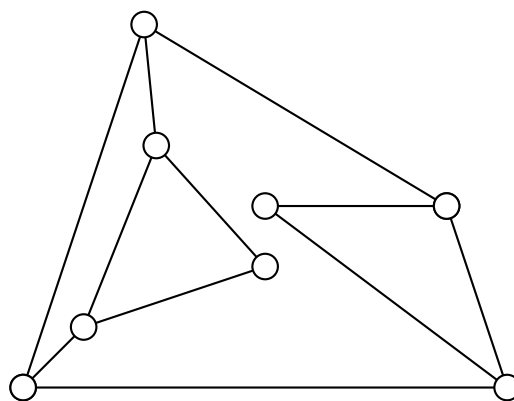


Íslenska stærðfræðafélagið
Félag raungreinakennara í framhaldsskólum

Stærðfræðikeppni framhaldsskólanema 2018–2019

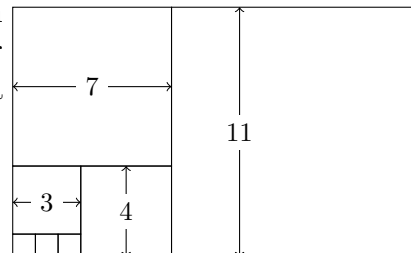
Svör og lausnir

Neðra stig



Fyrsti hluti

1. Rétthyrningurinn á myndinni er samsettur úr ferningum af mismunandi stærðum. Minnstu ferningarnir eru hver um sig með flatarmálið 1. Hvert er flatarmál stærsta ferningsins?



- 81 100 110 121

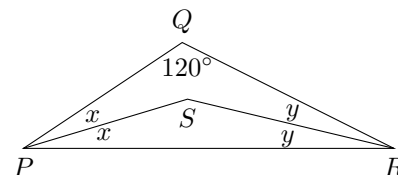
Skýring: Hliðarlengdir ferninganna aukast $1 \rightarrow 3 \rightarrow 4 \rightarrow 7 \rightarrow 11$ svo flatarmál stærsta ferningsins er $11 \times 11 = 121$

2. Einföldun á stæðunni $x - (2y + x) - 2(3x - 5y + 3y)$ gefur

- $-6x + 2y$ $-6x + 14y$ $-4x - 6y$ $-4x + 14y$ $-2x + 4y$

Skýring: Fellum sviga: $x - 2y - x - 6x + 10y - 6y = -6x + 2y$.

3. Á myndinni er þríhyrningur PQR með $\angle PQR = 120^\circ$. Einnig er $\angle QPS = \angle RPS$ og $\angle QRS = \angle PRS$. Hver er stærð $\angle PSR$?



- 130° 140° 150° 160°

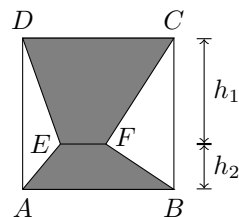
Skýring: Táknum stærðir hornanna $\angle QPS$ og $\angle RPS$ með x og stærðir hornanna $\angle QRS$ og $\angle PRS$ með y eins og sýnt er á mynd. Þar sem hornasumma þríhyrnings er 180° gildir að $2x + 2y + 120^\circ = 180^\circ$ svo $2x + 2y = 60^\circ$ og því er $x + y = 30^\circ$. Í þríhyrningnum PRS er hornasumman $x + y + \angle PSR = 180^\circ$ svo $30^\circ + \angle PSR = 180^\circ$ sem gefur að $\angle PSR = 150^\circ$

4. Um brotið $\frac{p}{q}$ er gefið að $3 \leq p \leq 10$ og $12 \leq q \leq 21$. Hver er mismunurinn á hæsta og lágsta mögulega gildi brotsins?

- $\frac{19}{84}$ $\frac{19}{70}$ $\frac{29}{42}$ $\frac{19}{12}$

Skýring: Brot er stærst þegar teljari er stærstur og nefnari minnstur, $\frac{10}{12}$. Brot er minnst þegar teljari er minnstur og nefnari stærstur, $\frac{3}{21}$. Mismunur þessarra tveggja stærða er $\frac{10}{12} - \frac{3}{21} = \frac{5}{6} - \frac{1}{7} = \frac{5 \cdot 7 - 6}{6 \cdot 7} = \frac{29}{42}$

5. Ferningur $ABCD$ hefur hliðarlengd 3 m. Punktarnir E og F eru staðsettir innan ferningsins. Um strikið EF gildir að það er 1 m að lengd og er samsíða hliðunum AB og CD . Hvert er flatarmál skyggða svæðisins, mælt í fermetrum?



- 5 $\frac{11}{2}$ 6 $\frac{13}{2}$

Skýring: Skyggða svæðið samanstendur af tveimur trapisum með samanlagðar hæðir $h_1 + h_2 = 3$. Samanlagt flatarmál er

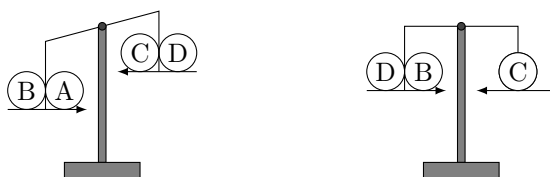
$$\frac{3+1}{2} \cdot h_1 + \frac{3+1}{2} \cdot h_2 = 2h_1 + 2h_2 = 2(h_1 + h_2) = 2 \cdot 3 = 6$$

6. Elísabet hefur lokið $\frac{2}{3}$ af daglegu morgunhlaupi sínu. Ef hún hleypur $\frac{1}{2}$ km í viðbót þá hefur hún lokið $\frac{3}{4}$ af hlaupinu. Hversu langt er daglegt morgunhlaup Elísabetar?

- 4 km 5 km 6 km 7 km

Skýring: Ef lengd daglegs morgunhlaups er táknuð með L þá er gefið að $\frac{2}{3}L$ að viðbættum $\frac{1}{2}$ km sé jafnt $\frac{3}{4}L$; það er, $\frac{2}{3}L + \frac{1}{2} = \frac{3}{4}L$. Sé þessi jafna leyst fyrir L fæst að $\frac{1}{2} = \frac{3}{4}L - \frac{2}{3}L = \frac{1}{12}L$. Svo $L = 6$.

7. Fjórar kúlur A, B, C og D eru af sömu stærð en mismunandi þyngd. Þær vega 10, 20, 30 og 40 grömm, ekki endilega í þessari röð. Hvaða kúla vegur 30 grömm?



- A B C D

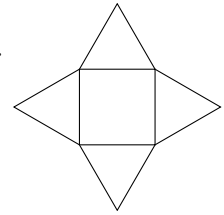
Skýring: Skv. vinstri vogarskál er $(A + B) > (C + D)$ og skv. hægri vogarskál er $(B + D) = C$. Þá má umrita fyrri ójöfnu: $(A + B) > (B + D + D)$. Svo $A > 2D$ og því er $D = 10$ grömm. Þá má rita $(B + 10) = C$ og því verður annaðhvort (i) $B = 20$ grömm og þá $C = 30$ grömm og $A = 40$ grömm eða (ii) $B = 30$ grömm og þá $C = 40$ grömm og $A = 20$. En möguleiki (ii) hefði í för með sér jöfnuna $(A + B) = (C + D)$ sem er í mótsögn við vinstri vogarskál.

8. Tvær hliðar þríhyrnings eru 5 og 8 að lengd. Lengd þriðju hliðar þríhyrningsins er einnig heiltala. Hversu mörg gildi koma til greina fyrir þriðju hliðina?

 7 8 9 10

Skýring: Í þríhyrningi er summa lengda hverra tveggja hliða alltaf stærri en lengd þriðju hliðar. Ef við táknum lengd þriðju hliðar þríhyrningsins með x þá verður (i) $x > 3$ vegna þess að $5 + x > 8$ og (ii) $x < 13$ vegna þess að $8 + 5 > x$. Ef, að auki, x á að vera heiltala fæst að $x \in \{4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$ svo það eru alls 9 möguleikar á lengd þriðju hliðar.

9. Stjarna er samsett úr ferningi og fjórum jafnhliða þríhyrningum. Ummál ferningsins er 36 cm. Hvert er ummál stjörnunnar?

 72 cm 90 cm 104 cm 120 cm

Skýring: Hliðarlengd ferningsins er $36/4 = 9$ cm sem er jöfn hliðarlengd þríhyrninganna fjögurra. Ummál stjörnunnar er þá $8 \times 9 = 72$ cm.

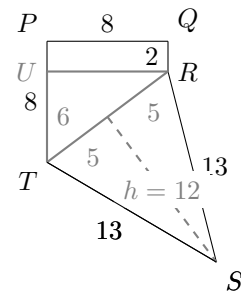
10. Alexandra sendir mynd til fimm vina sinna á mánudegi. Þau sem fá myndina senda hana til tveggja vina sinna daginn eftir. Þau sem fá myndina þann daginn senda hana til tveggja vina sinna daginn eftir og svo koll af kolli. Enginn fær myndina tvisvar. Hvaða vikudag er fjöldi þeirra sem fengið hafa myndina, að Alexöndru meðtalinni, meiri en 75?

 Fimmtudag Föstudag Laugardag Sunnudag

Skýring: Á mánudegi hafa 5 (auk Alexöndru) séð myndina. Á þriðjudegi hafa $5 + 5 \times 2 = 15 < 75$ (auk Alexöndru) séð myndina. Á miðvikudegi hafa $15 + 10 \times 2 = 35 < 75$ (auk Alexöndru) séð myndina. Á fimmtudegi hafa $35 + 20 \times 2 = 75$ (auk Alexöndru) séð myndina; alls $76 > 75$.

Annar hluti

11. Um fimmhyrninginn $PQRST$ gildir að $|PQ| = 8$, $|QR| = 2$, $|RS| = 13$, $|ST| = 13$ og $|TP| = 8$. Einnig er $\angle TPQ = \angle PQR = 90^\circ$. Hvert er flatarmál fimmhyrningsins?



- 76 84 92 100 108

Skýring: Samkvæmt reglu Pýþagórasar er (i) $|TR| = \sqrt{8^2 + 6^2} = \sqrt{100} = 10$ og (ii) hæðin í jafnarma þríhyrningi RST er $h = \sqrt{13^2 - 5^2} = \sqrt{144} = 12$. Flatarmál fimmhyrningsins má rita sem summu

$$\begin{aligned} PQRU + RTU + RST &= \\ 8 \times 2 + \frac{8 \times 6}{2} + \frac{10 \times 12}{2} &= \\ 16 + 24 + 60 &= 100 \end{aligned}$$

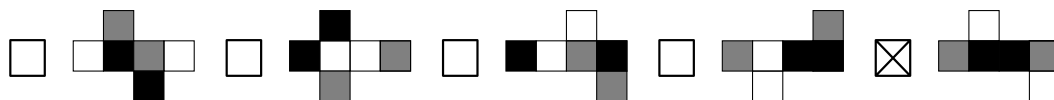
12. Á dulmáli eru táknið Υ , δ , Π , \mathfrak{E} og \mathfrak{B} notuð til að tákna tölustafina í menginu $\{1, 2, 3, 4, 5\}$. Ákvarðið hvaða tákn stendur fyrir töluna 3 ef gefið er að

$$\Pi + \Pi = \mathfrak{B}, \quad \delta + \delta = \Pi, \quad \delta + \mathfrak{B} = \mathfrak{E}.$$

- Υ δ Π \mathfrak{E} \mathfrak{B}

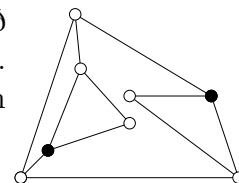
Skýring: Samkvæmt fyrstu tveimur jöfnum er $(\delta + \delta) + (\delta + \delta) = \mathfrak{B}$, svo eini möguleikinn er að $\delta = 1$ og þá $\Pi = 2$ og $\mathfrak{B} = 4$. Samkvæmt þriðju jöfnu er þá $\mathfrak{E} = 1 + 4 = 5$ svo eftir stendur að $\Upsilon = 3$

13. Tinna klippir eftirfarandi myndir út og brýtur saman þannig að þær myndi teninga. Mótstæðar hliðar eiga að vera í mismunandi lit. Merkið við þann tening sem er gallaður og uppfyllir ekki þetta skilyrði.



Skýring: Ferningarnir fjórir í röð mynda hliðar teningsins og ferningarnir sem standa útaf, upp og niður mynda topp og botn teningsins. Á síðustu mynd sést að toppur og botn tenings eru báðir hvítir.

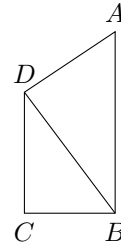
14. Á myndinni sjást ljósaperur og snúrur milli þeirra. Með því að snerta peru þá kviknar á henni og öllum næstu nágrönnum hennar. Hver er minnsti fjöldi þera sem þarf að snerta til að kveikja á öllum perunum á myndinni?



- 2 3 4 5 6

Skýring: Perurnar eru alls átta og engin ein þeirra er tengd öllum hinum sjö, svo snerta þarf a.m.k. tvær perur. Dökku perurnar tvær duga.

15. Í trapisu $ABCD$ er $\angle ABC = 90^\circ$, AB er samsíða CD og hornalínan BD er hornrétt á hliðina AD . Ef $|BC| = 3$ og $|BD| = 5$, hvert er þá flatarmál trapisunnar?



- 15 $\frac{123}{8}$ 30 $\frac{1107}{32}$ 45

Skýring: Samkvæmt reglu Pýþagórasar er

$$|CD| = \sqrt{|BD|^2 - |BC|^2} = \sqrt{5^2 - 3^2} = 4$$

Þar sem hornin $\angle CDB$ og $\angle ABD$ eru jafn stór þá eru þríhyrningarnir ABD og BDC einslaga. Þá gildir eftirfarandi jafna um hlutföll:

$$|AB| : |BD| = |BD| : |DC| \quad \text{eða} \quad \frac{|AB|}{5} = \frac{5}{4}$$

Svo $|AB| = \frac{25}{4}$ og flatarmál trapisunnar er

$$\frac{|AB| + |DC|}{2} \cdot |BC| = \frac{25/4 + 4}{2} \cdot 3 = \frac{25 + 16}{8} \cdot 3 = \frac{123}{8}$$

Þriðji hluti

16. Gefið er að $\frac{1}{x} = 2$ og $\frac{1}{x} + \frac{3}{y} = 3$. Hver er þá summan $x + y$?

Svar: $7/2$

Skýring: Ef $\frac{1}{x} = 2$ þá gildir annars vegar að $x = \frac{1}{2}$ og hinsvegar að jafnan $\frac{1}{x} + \frac{3}{y} = 3$ tekur formið $2 + \frac{3}{y} = 3$ sem gefur $\frac{3}{y} = 1$ svo $y = 3$. Þá fæst summan $x + y = \frac{1}{2} + 3 = \frac{7}{2}$

17. Um þrjá einstaklinga A , B og C er eftirfarandi vitað:

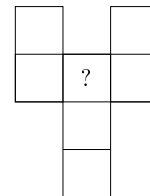
- (i) Ef A er ekki sekur þá eru B og C báðir sekir.
- (ii) Annað hvort er A ekki sekur eða B er sekur.
- (iii) Annað hvort er B ekki sekur eða C er ekki sekur.

Segið til um hver, ef einhver þessara þriggja, er saklaus.

Svar: C er saklaus

Skýring: A getur ekki verið saklaus því þá eru B og C báðir sekir skv. (i) en það stangast á við (iii). Svo A er sekur og þar með, skv. (ii), er B sekur. Þá verður, skv. (iii), C að vera saklaus.

18. Leó ætlar að rita heilu tölurnar, frá og með 1 til og með 7, í reitina hér til hægri þannig að engir tveir reitir sem liggja horn í horn eða eiga sameiginlega hlið innihaldi tölur sem eru samliggjandi. Hvaða tölu(r) má rita í merкта reitinn?



Svar: 1 eða 7

Skýring: Tölurnar 2–6 eru samliggjandi tveimur tölum hver. Aðeins önnur þessara tveggja talna færi í neðsta reit. Hin talan færi í einn reitanna fjögurra sem eru horn-í-horn við eða samhliða merкта reitnum. Það er því ómögulegt að rita einhverja talnanna 2–6 í merкта reitinn. Endatölurnar 1 og 7 eru samhliða aðeins einni tölu og þá tölu má rita í neðsta reit. Hinum fimm má raða þannig að skilyrðum er uppfyllt.

19. Ef $2a = 3b + 5$, hvert er þá gildið á $\frac{4^a}{8^b}$?

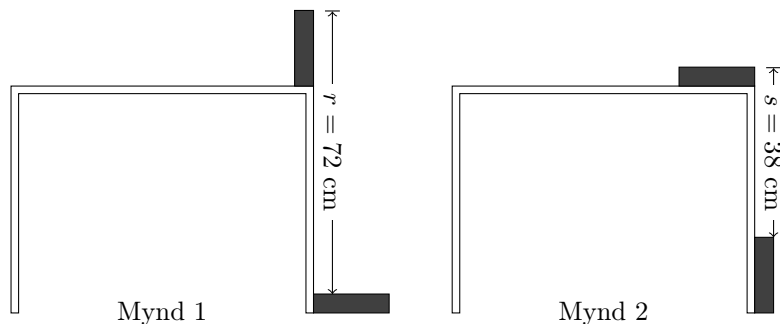
Svar: 32

Skýring: Ritum tölurnar 4 og 8 sem veldi af 2.

$$\frac{4^a}{8^b} = \frac{(2^2)^a}{(2^3)^b} = \frac{2^{2a}}{2^{3b}} = 2^{2a-3b} = 2^5 = 32$$

vegna þess að $2a = 3b + 5$ gefur $2a - 3b = 5$.

20. Tveimur eins múrsteinum er stillt upp á og við borð eins og sýnt er á mynd 1. Hæðin r mælist 72 cm. Á mynd 2 sjást sama borð og sömu múrsteinar en nú er uppstillingin önnur og mælist hæðin s aðeins 38 cm. Hversu hátt er borðið?



Svar: 55 cm

Skýring: Táknum lengd og breidd múrsteins með l og b og látum h tákna hæð borðsins. Skv. vinstri mynd gildir jafnan $h - b + l = 72$ og skv. hægri mynd gildir jafnan $h + b - l = 38$. Séu jöfnurnar tvær lagðar saman fæst $2h + 0 + 0 = 110$ svo hæð borðsins er $h = 110/2 = 55$ cm

Fjórði hluti

21. Talan $101^4 - 1$ er deilanleg með fimm mismunandi frumtölum (prímtölum). Finnið fjórar þeirra.

Lausn: Athugum að

$$\begin{aligned} 101^4 - 1 &= (101^2 - 1)(101^2 + 1) = (101 - 1)(101 + 1)(101^2 + 1) \\ &= 100 \cdot 102 \cdot (101^2 + 1) \end{aligned}$$

Nú er $100 = 2^2 \cdot 5^2$ og $102 = 2 \cdot 51 = 2 \cdot 3 \cdot 17$ svo að

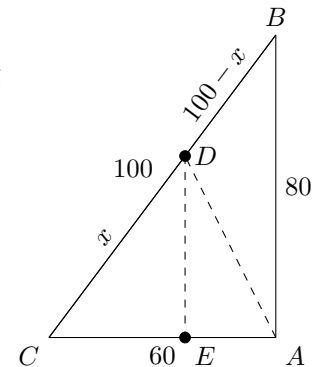
$$101^4 - 1 = 2^2 \cdot 5^2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 17 \cdot (101^2 + 1)$$

sem sýnir að talan $101^4 - 1$ er deilanleg með frumtölunum 2,3,5 og 17.

22. Þríhyrningurinn ABC er rétthyrndur með $\angle A = 90^\circ$, hliðar $b = 60$, $c = 80$ og $a = 100$. D er staðsettur á hliðinni a þannig að þríhyrningarnir ABD og ADC hafa sama ummál. Finnið lengd hliðarinnar AD .

Lausn: Látum $|CD| = x$. Gefið er að

$$\begin{aligned} x + |AD| + 60 &= |AD| + (100 - x) + 80 \\ \text{svo } 2x &= 120 \\ \text{og því } x &= 60 \end{aligned}$$



Staðsetjum punkt E á hlið AC þannig að þríhyrningarnir ABC og EDC eru einslaga. Þá fæst:

$$\begin{aligned} \frac{|CE|}{x} &= \frac{60}{100} = \frac{3}{5} \\ |CE| &= x \cdot \frac{3}{5} = 60 \cdot \frac{3}{5} = 36 \end{aligned}$$

Nú er AD langhlið í rétthyrndum þríhyrningi EAD svo

$$\begin{aligned} |AD|^2 &= |ED|^2 + |EA|^2 = (60^2 - |CE|^2) + (60 - |CE|)^2 \\ &= 2 \cdot 60^2 - 2 \cdot 60 \cdot |CE| = 2 \cdot 60(60 - |CE|) = 2 \cdot 60 \cdot 24 \end{aligned}$$

$$\text{Svo } |AD| = \sqrt{2 \cdot 60 \cdot 24} = \sqrt{5 \cdot 24^2} = 24\sqrt{5}$$